ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 30. April 2007, 16:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	4	5	6	7	Summe
Soll	5	6	4	8	24
Ist					

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

4. Berechnen Sie die Krümmung κ der Ellipse $c(t) = \big(a\cos t, b\sin t\big)$, wobei $a, b > 0$ und $t \in [0, 2\pi]$. In welchen Punkten wird die Krümmung maximal bzw. minimal? Diese Punkte nennt man *Scheitelpunkte*.

5. Die *Schleppkurve* oder *Traktrix* ist die Kurve
$$c(t) := \left(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\right) \quad ; \ t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $c(t)$ regulär für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
   (b) Der Abstand zwischen $c(t)$ und dem Schnittpunkt der y-Achse und der Tangentengerade $\{c(t) + sc'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ist konstant für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (c) Skizzieren Sie die Kurve c und berechnen Sie ihre Krümmung $\kappa(t)$.

6. Gegeben sei eine ebene Kurve $c(t)\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa(t)$ sowie eine orthogonale 2×2-Matrix A, d.h. $A^T A = E$. Berechnen Sie die Krümmung $\tilde{\kappa}(t)$ der Kurve $\tilde{c}(t) := Ac(t)$ in Abhängigkeit von $\kappa(t)$.

7. Es sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve.
   (a) Ist c *eben*, d.h. in einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten, so gilt $\tau \equiv 0$.
   (b) Zeigen Sie $b' = -\tau n$, indem Sie die Skalarprodukte von b' mit c', n, b berechnen.
   (c) Zeigen Sie nun die Umkehrung von (a). (Was ist $\langle b, c\rangle'$?)