ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 5. Juni 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	19	20	21	Summe
Soll	6	6	8	20
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

19. Zwei Immersionen $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$k(x,y) := (\cosh x \cos y, \cosh x \sin y, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x \sin y, -\sinh x \cos y, y).$$

Man nennt k das *Katenoid* und h das *Helikoid*.

(a) Ermitteln Sie die Matrixdarstellungen der ersten Fundamentalformen von k und h und überprüfen Sie, ob diese gleich sind.

(b) Skizzieren Sie beide Flächen.
Tipp: Stellen Sie sich zunächst die Parameterlinien $x \mapsto k(x,y)$ bzw. $h(x,y)$ sowie $y \mapsto \ldots$ vor.

20. Eine Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt winkeltreu, wenn ihr Differential df_p als lineare Abbildung winkeltreu ist, d.h. wenn

$$\frac{\langle df_p(X), df_p(Y)\rangle}{|df_p(X)||df_p(Y)|} = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X||Y|} \quad \text{für } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Zeigen Sie: f ist genau dann winkeltreu, wenn g in jedem Punkt ein positives Vielfaches der Einheitsmatrix ist, also wenn $g_{ij}(p) = \Lambda(p)\delta_{ij}$ mit einer Funktion $\Lambda : U \to (0, +\infty)$ gilt.

21. Gegeben sei die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sowie die beiden Parametrisierungen

$$k(x,y) := (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x) \quad \text{für } (x,y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi),$$
$$s(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1) \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man nennt k Parametrisierung in *Kugelkoordinaten* und s die Parametrisierung durch *stereographische Projektion*.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl k als auch s Teilmengen von $\mathbb{S}^2$ parametrisieren. Welche Teilmengen sind dies?

(b) Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen Immersionen sind, d.h. dk_p und ds_p besitzen vollen Rang für alle p im jeweiligen Definitionsbereich.

(c) Welche der Parametrisierungen ist winkeltreu?