ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 3
Abgabe: bis 30.4.2008, 12:30 Uhr

1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x_1, x_2, x_2, x_4 \in X$ zeige man die *Vierecksungleichung*: (5)

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

2. Es sei d eine Metrik auf einem Vektorraum X über $\mathbb{C}$. Wir nennen d

   (a) translationsinvariant:$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X: \ d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

   (b) homogen:$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X: \ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x, y)$.

   Beweisen Sie: es gibt genau dann eine d induzierende Norm auf X, wenn d translationsinvariant und homogen ist. (6)

3. Es sei M eine Teilmenge der komplexen Ebene, für einen Punkt $\xi \in \mathbb{C}$ definieren wir den Abstand zu M durch

$$d(\xi, M) = \inf_{z \in M} |\xi - z| \,.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $d(\xi, M) = d(\xi, \overline{M})$, (3)

   (b) $d(\xi, M) = 0 \ \Leftrightarrow \ \xi \in \overline{M}$, (2)

   (c) $|d(\xi_1, M) - d(\xi_2, M)| \leq |\xi_1 - \xi_2|$. (1)

4. Man beweise die folgenden Aussagen über metrische Räume:

   (a) endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt und (2)

   (b) beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. (2)