ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 5

Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 19.5 bis 25.5.2008

1. Welche der auf $\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ definierten Funktionen (je 2)

   (a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, (b) $f(z) = \dfrac{\overline{z} \operatorname{Re} z}{z}$, (c) $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

   kann man bei $z = 0$ so definieren, dass sie dort stetig sind?

2. Man gebe Beispiele von Potenzreihen $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R = 1$ an, derart, dass $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ (je 2)

   (a) konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$,
   (b) divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, bzw.
   (c) für einige $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ divergiert und für andere konvergiert.

3. Es sei $\mathcal{R} = [x_0, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subset \mathbb{R}^2$ $(r, s > 0)$ ein Rechteck, $f \in C(\mathcal{R}, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion von $\mathcal{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $\sup\limits_{(x,y) \in \mathcal{R}} |f(x,y)| = K < \infty$, $\ell = \min \left\{ r, \dfrac{s}{K} \right\}$ und $I = [x_0, x_0 + \ell]$.

   (a) Zeigen Sie, dass für die Partition $\pi_k : x_0 < x_1 < \ldots < x_k = x_0 + \ell$ durch die rekursive Definition (3)

   $$(*) \quad \begin{array}{ll} y_k(x) = (x - x_0) f(x_0, y_0) + y_0, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_k(x) = (x - x_j) f(x_j, y_k(x_j)) + y_k(x_j), & x_j < x \leq x_{j+1},\ j = 1, \ldots, k-1 \end{array}$$

   ein Streckenzug in $\mathcal{R}$ gegeben ist.
   Ein Streckenzug ist eine Kurve, die je zwei aufeinanderfolgende Punkte p_i, p_{i+1} $(i = 0, \ldots, k-1)$ einer endlichen Menge von Punkten $p_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, \ldots, k)$ geradlinig verbindet.

   (b) Es sei nun $\{ \pi_k \}_{k \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge von I, d.h. π_k ist eine Partition von I für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\max\limits_{0 \leq j < k} \left| x_j^{(k)} - x_{j+1}^{(k)} \right| \to 0$ für $k \to \infty$. Man überprüfe, ob die zugehörige Folge der Streckenzüge $\{ y_k \}_{k \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà–Ascoli erfüllt. (3)

   (c) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition des Riemann–Integrals, dass die Grenzfunktion einer Teilfolge von $\{ y_k \}_{k \in \mathbb{N}}$, die nach dem Satz von Arzelà–Ascoli existiert, die Integralgleichung (4)

   $$(**) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

   für $x \in I$ löst.