ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 7
Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 2.6 bis 8.6.2008

1. Man zeige, dass die Funktion $f(z) = z\operatorname{Re} z$ nur für $z = 0$ komplex differenzierbar ist. (3)

2. Geben Sie jeweils eine reellwertige Funktion $u(x, y)$ an, so dass die Funktion $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist.
   (a) $v(x, y) = e^x \sin y$ (2)
   (b) $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ (2)

3. Es sei $f = u + iv$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $u^2 = v$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. (4)

4. Es sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, welche die Funktionalgleichung (3)
$$f(z + w) = \frac{f(z) + f(w)}{1 - f(z)f(w)}$$
erfüllt. Man beweise, dass, falls ferner $f(0) = 0$ sowie $f'(0) = 1$ gilt, f eine Lösung der Differentialgleichung
$$f' = 1 + f^2$$
ist.

5. Es seien $u(x, y), v(x, y)$ stetige Funktionen mit stetigen ersten partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $z_0 = (x_0, y_0)$. Desweiteren sei $f = u + iv$ und der Grenzwert (8)
$$\lim_{h+ik\to 0} \left| \frac{f(z_0 + h + ik) - f(z_0)}{h + ik} \right|$$
möge existieren. Zeigen Sie, dass dann entweder f oder $\overline{f}$ in z_0 komplex differenzierbar ist.
Hinweis: Mittelwertsatz.