



Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 8

Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 9.6 bis 15.6.2008

1. Man untersuche die Funktionen $f(z) = \cos z$ und $g(z) = \frac{z^2 + 4}{z^2 + 4z + 2}$ auf lokale Umkehrbarkeit in \mathbb{C} . (4)

2. Es sei γ ein einfach durchlaufener Weg, dessen Spur das Gebiet $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$ berandet. Bestimmen Sie jeweils $\int_{\gamma} f(z) dz$. (8)

(a) $f(z) = \frac{z}{|z|}$,

(b) $f(z) = |z|$.

3. Bestimmen Sie (5)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(1+z^4) \exp z} dz,$$

wobei γ die Ellipse $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ gegen den Uhrzeigersinn berandet.

4. Es sei γ ein Weg mit der Parametrisierung $\gamma(t) = z_0 + \left(\frac{t^2}{\pi} + 2(\pi - t)\right) e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Man bestimme für $a \in \mathbb{C}$ (4)

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z - z_0} dz.$$

5. Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel. Dabei bezeichne $|z - z_0| = r$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ jeweils die Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (2,2,4)

(a) $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z-i} dz$;

(b) $\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-2)(z-4)}$;

(c) $\int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}$;

6. Es sei γ eine hinreichend glatte, geschlossene Kurve. Man berechne das Integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$, wenn

(a) der Punkt $3i$ innerhalb und der Punkt $-3i$ außerhalb der Kurve γ liegt; (3)

(b) der Punkt $-3i$ innerhalb und der Punkt $3i$ außerhalb der Kurve γ liegt; (1)

(c) die Punkte $\pm 3i$ innerhalb der Kurve γ liegen. (3)