



**Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 8**

Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 9.6 bis 15.6.2008

1. Man untersuche die Funktionen  $f(z) = \cos z$  und  $g(z) = \frac{z^2 + 4}{z^2 + 4z + 2}$  auf lokale Umkehrbarkeit in  $\mathbb{C}$ . (4)

2. Es sei  $\gamma$  ein einfach durchlaufener Weg, dessen Spur das Gebiet  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$  berandet. Bestimmen Sie jeweils  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . (8)

(a)  $f(z) = \frac{z}{|z|}$ ,

(b)  $f(z) = |z|$ .

3. Bestimmen Sie (5)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(1+z^4) \exp z} dz,$$

wobei  $\gamma$  die Ellipse  $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$  gegen den Uhrzeigersinn berandet.

4. Es sei  $\gamma$  ein Weg mit der Parametrisierung  $\gamma(t) = z_0 + \left(\frac{t^2}{\pi} + 2(\pi - t)\right) e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Man bestimme für  $a \in \mathbb{C}$  (4)

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z - z_0} dz.$$

5. Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel. Dabei bezeichne  $|z - z_0| = r$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  jeweils die Kurve  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . (2,2,4)

(a)  $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z-i} dz$ ;      (b)  $\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-2)(z-4)}$ ;      (c)  $\int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}$ ;

6. Es sei  $\gamma$  eine hinreichend glatte, geschlossene Kurve. Man berechne das Integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$ , wenn

(a) der Punkt  $3i$  innerhalb und der Punkt  $-3i$  außerhalb der Kurve  $\gamma$  liegt; (3)

(b) der Punkt  $-3i$  innerhalb und der Punkt  $3i$  außerhalb der Kurve  $\gamma$  liegt; (1)

(c) die Punkte  $\pm 3i$  innerhalb der Kurve  $\gamma$  liegen. (3)