ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 9

Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 16.6 bis 22.6.2008

1. Man berechne
   (a) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \cos z}$ (1)
   (b) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz$ (2)
   (c) $\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}$, mit $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < r < |b|$ und $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. (3)
2. Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass für $|z_0| \neq R$ (3)
   $$\int_{|z|=R} \frac{p(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz = 0$$
   gilt.
3. Man gebe eine Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{z}$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ an. Bestimmen Sie auch den Konvergenzradius der Potenzreihe. (3)
4. Man zeige die erweiterte Fassung der *l'Hospitalschen Regel*: Es seien f, g holomorph in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ und ferner gelte
   $$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0,$$
   $$g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(k)}(z_0) \neq 0.$$
   Dann gilt (4)
   $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$
   Berechnen Sie ferner (2)
   $$\lim_{z \to 0} \frac{z^3}{z - \sin z}.$$
5. Untersuchen Sie, ob es eine in $z_0 = 0$ holomorphe Funktion gibt, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, der Reihe nach die Werte
   (a) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ (2)
   (b) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$ (2)
   (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$ (2)
   (d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ annimmt. (2)