ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 10

Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 23.6 bis 29.6.2008

1. Berechnen Sie durch Differenzieren der Gleichung (5)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

für $|z| < 1$ die Werte der Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

2. Für $1 \leq k \in \mathbb{N}$ heißt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ *Nullstelle der Ordnung* k von $f(z)$, wenn $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ gilt.
Zeigen Sie: z_0 ist genau dann eine Nullstelle der Ordnung k einer holomorphen Funktion $f(z)$, wenn (8)

$$f(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$$

in einer Umgebung von z_0 gilt, wobei $\phi(z)$ dort holomorph und $\phi(z_0) \neq 0$ ist.

3. Man bestimme die Ordnung der Nullstelle bei $z = 0$ für die Funktionen
   (a) $z^2(e^{z^2} - 1)$, (3)
   (b) $e^{\sin z} - e^{\tan z}$. (3)

4. Der Punkt z_0 sei eine Nullstelle der Ordnung k der Funktion $f(z)$ und eine Nullstelle der Ordnung l der Funktion $g(z)$. Was ist der Punkt z_0 für die Funktionen
   (a) $f(z)g(z)$, (5)
   (b) $f(z) + g(z)$? (3)

5. Es sei f eine holomorphe Funktion auf dem Einheitskreis $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ mit $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$ und $f(0) = 0$. Beweisen Sie
   (a) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \Omega$, (5)
   (b) gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $0 \neq z_0 \in \Omega$, dann ist $f(z) = e^{i\alpha} z$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. (3)

   Hinweis: Potenzreihenentwicklung.