ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 11
Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 30.6 bis 6.7.2008

1. Zeigen Sie, dass die Funktion (3)

$$f(z) = \sin\left(x \cdot \frac{2\pi}{a}\right) \cos\left(y \cdot \frac{2\pi}{b}\right),$$

mit $0 < a, b \in \mathbb{R}$ konstant, $ma + inb$ periodisch mit $m, n \in \mathbb{Z}$ ist. Beweisen Sie ferner, dass es keine nicht konstanten ganzen Funktionen mit der Periode $ma + inb$ gibt.

2. Man zeige, dass es für eine ganze Funktion $T(z)$, die kein Polynom ist, eine Folge $z_k \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$ gibt, so dass für jedes Polynom $P_n(z)$ vom Grade n auch (5)

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{T(z_k)}{P_n(z_k)} \right| = \infty$$

gilt.

3. Finden Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie die Art der Singularitäten sowie das Verhalten im Unendlichen.

   (a) $\dfrac{1}{z + z^3}$, (3)

   (b) $\dfrac{e^z}{1 + z^2}$, (4)

   (c) $\dfrac{z^5}{(1 - z)^2}$, (3)

   (d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{z^2 + 1}\right)$. (3)

4. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzbereich der folgenden Laurent–Reihen.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^{|n|}}$, (2)

   (b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n + 1}$, (2)

   (c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (4)

5. Man entwickle die folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten in Laurent–Reihen.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z} \sin\left(\dfrac{2}{z}\right)$, $|z| > 0$, (3)

   (b) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$, $|z| > 0$, (3)

   (c) $f(z) = \dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$, $1 < |z| < 2$. (4)