ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Analysis IV – Funktionentheorie – Übungsblatt 12

Abgabe: in den Übungen in der Woche vom 7.7 bis 13.7.2008

1. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = ((z-a)(z-b))^{-1}$ mit $0 < |a| < |b|$ jeweils in eine Laurent–Reihe

   (a) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, (3)

   (b) um den Entwicklungspunkt $z_0 = a$, (3)

   (c) für $|z| > |b|$ (3)

   (d) und im Ring $|a| < |z| < |b|$. (3)

   Geben Sie in den ersten beiden Fällen auch den Konvergenzbereich an.

2. Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grade n, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, mit einfachen Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Zeigen Sie, dass (4)

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{z - z_k}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{ z_1, \ldots, z_n \}$$

   mit

$$C_k = \frac{1}{p'(z_k)}, \; k = 1, \ldots, n$$

   gilt.

3. Es sei f holomorph in $\Omega \supset \overline{D(0,R)} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R \}$, $R > 0$ und $f(z) = u(z) + iv(z)$ sei die Zerlegung von f in Real– und Imaginärteil. Beweisen Sie für $0 \leq r < R$ und $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ die Integralformel von Poisson: (9)

$$u\left(re^{i\vartheta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(Re^{i\varphi}\right) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

4. Beweisen Sie den *Satz von Liouville* mit Hilfe des *Schwarzschen Lemmas* (Aufgabe 5 auf Blatt 10). (8)