Musterlösung Analysis IV SS 08 Übungsblatt 13

1. Seien h der Homöorphismus von $\Omega_1 \to \Omega_2$ und $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \subset \Omega_2$, $t \in [0,1]$, zwei Kurven mit dem selben Anfangs– und Endpunkt $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$. Dann sind $h^{-1}(\gamma_1(t)), h^{-1}(\gamma_2(t))$ zwei Kurven mit gleichem Anfangs– und Endpunkt $(z_1^{(1)} = h^{-1}(z_1^{(2)}), z_2^{(1)} = h^{-1}(z_2^{(2)}))$ in Ω_1. Da Ω_1 einfach zusammenhängend ist, existiert eine stetige Abbildung $z(t,\lambda) : [0,1]^2 \to \Omega_1$ mit $z(0,\lambda) = z_1^{(1)}, z(1,\lambda) = z_2^{(1)}$ für $\lambda \in [0,1]$ und $z(t,0) = h^{-1}(\gamma_1(t)), z(t,1) = h^{-1}(\gamma_2(t))$. Nun gilt, dass $h(z(t,\lambda)) : [0,1]^2 \to \Omega_2$ als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen stetig ist und $h(z(t,0)) = \gamma_1(t), h(z(t,1)) = \gamma_2(t)$, d.h. γ_1, γ_2 sind homotop zueinander. Da die Kurven beliebig waren folgt, dass Ω_2 einfach zusammenhängend ist.

2. Zu zeigen sind

   (a) Reflexivität: $\gamma \sim \gamma$, klar: $z(t,\lambda) := \gamma(t)$

   (b) Symmetrie: $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$, klar, denn ist $z(t,\lambda)$ die stetige Deformation, die γ_1 in γ_2 überführt, so überführt $z(t, 1-\lambda)$ die Kurve γ_2 in γ_1.

   (c) Transitivität: Seien $\gamma_1 \sim \gamma_2$ und $\gamma_2 \sim \gamma_3$ mit den Abbildungen $z_{12}(t,\lambda)$, bzw. $z_{23}(t,\lambda)$. Dann ist

$$z_{13}(t,\lambda) = \begin{cases} z_{12}(t, 2\lambda) & : \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ z_{23}(t, 2\lambda - 1) & : \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

   Offenbar erfüllt $z_{13}(t,\lambda)$ die geforderten Bedingungen, für $\lambda = \frac{1}{2}$ ist $z_{13}(t,\lambda) = \gamma_2(t)$.

3. Nebenrechnung: Wir differenzieren Cauchy–Riemann jeweils nach der „anderen" Koordinate:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y & &\Rightarrow u_{xx} = v_{xy} \\ u_y &= -v_x & &\Rightarrow u_{yy} = -v_{xy} \\ \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

$v_{xx} + v_{yy} = 0$ analog, d.h. für holomorphe Funktionen $f = u + iv$ gilt $\Delta u = 0, \Delta v = 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \partial_x |f| &= \partial_x \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} = \frac{uu_x + vv_x}{|f|} \\ \partial_y |f| &= \frac{uu_y + vv_y}{|f|} \\ \partial_x^2 |f| &= \frac{|f|\left(u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx}\right) - \frac{uu_x + vv_x}{|f|}(uu_x + vv_x)}{|f|^2} \\ \partial_y^2 |f| &= \frac{|f|\left(u_y^2 + uu_{yy} + v_y^2 + vv_{yy}\right) - \frac{(uu_y + vv_y)^2}{|f|}}{|f|^2}, \end{aligned}$$

falls $|f| \neq 0$. Sollte $|f| \equiv 0$ sein, so sind wir fertig. Ansonsten kann die Menge der Punkte, in denen $|f| = 0$ gilt, keinen Häufungspunkt in Ω haben. Jetzt gilt also

$$\begin{aligned} &\Delta |f| = 0 \\ \Leftrightarrow\ & |f|^2 \left(u_x^2 + u_y^2 + u(u_{xx} + u_{yy}) + v_x^2 + v_y^2 + v(v_{xx} + v_{yy})\right) + (uu_x + vv_x)^2 + (uu_y + vv_y)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (u^2 + v^2)(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + u^2u_x^2 + 2uvu_xv_x + v^2v_x^2 + u^2u_y^2 \underbrace{+2uvu_yv_y}_{=-2uvv_xu_x} + v^2v_y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (u^2 + v^2)(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + u^2u_x^2 + v^2v_x^2 + u^2u_y^2 + v^2v_y^2 = 0 \end{aligned}$$

Da nach Cauchy–Riemann $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2$ gilt die Gleichung also, indem man den hinteren Teil als $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)$ schreibt, genau dann, wenn

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 = 0,$$

d.h. f ist konstant.

4. Wir integrieren $F(z) = \int_0^1 e^{-z^2 t} dt$ über eine einfache geschlossene Kurve $\boldsymbol{\gamma} \subset \mathbb{C}$:

$$\int_\gamma F(z) dz = \int_\gamma \left(\int_0^1 e^{-z^2 t} dt \right) dz = \int_0^1 \left(\int_\gamma e^{-z^2 t} dz \right) dt = 0,$$

da der Integrand für jedes t holomorph ist (CIS), also folgt mit dem Satz von Morera, dass $F(z)$ holomorph ist.
Weiter gilt für $z \neq 0$

$$F(z) = \int_0^1 e^{-z^2 t} dt = -\frac{e^{-z^2 t}}{z^2}\Big|_0^1 = \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2},$$

$F(z)$ kann mit l'Hospital in $z = 0$ stetig fortgesetzt werden ($F(0) = 1$).