ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 1

Abgabe: bis 22. Oktober 2007, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

1. Es sei $M := \{\, (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N} \,\}$ die Menge der reellen Folgen. Man zeige, dass durch

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x, y \in M,$$

   (M, d) ein *metrischer Raum* wird.

2. Es sei $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$. Beweisen Sie:

   (a) $a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

   (b) für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon^p}{p} a^p + \frac{1}{\varepsilon^q \cdot q} b^q.$$

3. Beweisen Sie die die Minkowski–Ungleichungen: Es sei $p \geq 1$

   (a) sei ferner $a, b \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

   (b) und seien f, g stetige Funktionen einer Variablen, $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\left(\int_a^b |f + g|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$