ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 2

Abgabe: bis 29. Oktober 2007, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

Eine *Äquivalenzrelation* $\sim$ auf einer Menge X ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf X,

d.h. für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{array}{ll} x \sim x & \text{(Reflexivität)}, \\ x \sim y \Rightarrow y \sim x & \text{(Symmetrie) und} \\ x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z & \text{(Transitivität)}. \end{array}$$

Die Menge $A_x = [x]$ aller zu einem Element $x \in X$ äquivalenter Elemente y nennt man *Äquivalenzklasse*.

1. Beweisen Sie: Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Für Cauchy–Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus M definieren wir eine Relation $\sim$ mit

   $$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (y_k)_{k\in\mathbb{N}} :\Leftrightarrow (d(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge.}$$

   Weisen Sie nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchy–Folgen aus (M, d) ist.

2. Zeigen Sie: Im $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent, d.h. sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Normen, dann existiert ein $a > 0$ mit

   $$\frac{1}{a}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq a\|x\|_1 .$$

3. Weisen Sie nach:

   (a) Auf der Menge der *gerichteten Strecken* $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ wird für $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, durch

   $$x \sim y :\Leftrightarrow x_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

   eine Äquivalenzrelation eingeführt, dabei bedeutet "$-$" die Subtraktion im $\mathbb{R}^2$.

   (b) Der *geometrische Vektor* (Äquivalenzklasse gerichteter Strecken)

   $$\overrightarrow{x_1x_2} = \{\, y = (y_1, y_2) \in X \mid y_2 - y_1 = x_2 - x_1 \,\}$$

   enthält genau einen *Ortsvektor* als *Repräsentanten*, d.h. eine gerichtete Strecke der Form $(0, z)$.

   (c) Die Menge der geometrischen Vektoren bildet mit den folgenden Setzungen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$:

   $$\overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{y_1y_2} := \overrightarrow{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}$$
   $$\lambda\overrightarrow{x_1x_2} := \overrightarrow{(\lambda x_1)(\lambda x_2)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Zeigen Sie auch, dass die so erklärte Addition und Multiplikation mit Skalaren *repräsentantenunabhängig* ist.