ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 3

Abgabe: bis 5. November 2007, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

Der *Träger* (engl. *support*) einer Funktion f definiert auf einer Menge Ω ist

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\}}.$$

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge.
Wir betrachten *Sobolev–Räume* $H_0^{k,p}(\Omega)$, die als Vervollständigung des Raumes $C_0^k(\Omega)$ der k–mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, ausgestattet mit der $H^{k,p}$–Norm

$$\|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in H_0^{k,p},$$

definiert werden.
Der *Sobolev–Raum* $W^{k,p}(\Omega)$ besteht aus den $u \in L^p(\Omega)$, für die die *schwachen partiellen Ableitungen* bis zur Ordnung k in L^p existieren, dabei verstehen wir für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ unter einer schwachen partiellen Ableitung der Ordnung $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ eine Funktion $L^p \ni v = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, die

$$\int_\Omega v \eta dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \eta dx$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt. Ferner sei $u \in W_{loc}^{k,p}(\Omega)$, wenn $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ (d.h. $\overline{\Omega'} \subset \Omega$).

1. Man zeige, für $1 \leq p < \infty$ liegt $C^0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.
2. $H_0^{k,p}(\Omega) \subset W_{loc}^{k,p}(\Omega)$
3. $W_{loc}^{k,p}(\Omega) \subset H_0^{k,p}(\Omega)$
4. Sei $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ und $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ gelte $(u, v) = 0$. Dann gilt $(u, v) = 0$ für alle $v \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.
5. Es sei u harmonisch im *schwachen Sinne*, d.h. $u \in L^1(\Omega)$ erfüllt

   $$\int_\Omega u \Delta v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

   Sei zusätzlich $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$. Man zeige:

   $$\sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i u D_i v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$