ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 4
Abgabe: bis 12. November 2007, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

1. Zeigen Sie: $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis (ONB) in $C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ bezüglich des L^2–Skalarproduktes $(u,v) = \int_0^{2\pi} uv\,dx$.

2. Orthogonalisieren Sie die Mononome $1, t, t^2, \ldots$ in $L^2(-1,1)$ nach dem Gram–Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren und gewinnen Sie so die Legendre–Polynome:
$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

3. Man beweise Korollar 2.1.11: Ein Prä–Hilbert–Raum $(X, (\ ,\ ))$ ist genau dann separabel, wenn es eine Orthonormal–Basis (e_k) in X gibt.

4. Beweisen Sie: Jeder Prä–Hilbert–Raum X ist *gleichmäßig konvex*, d.h.
$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

5. Zeigen Sie, dass der Approximationssatz 2.2.1 in jedem gleichmäßig konvexen Banachraum gilt.