ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 6

Abgabe: bis 26. November 2007, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

Es sei H ein Hilbert–Raum. Mit $L(H)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Operatoren von H.

1. Zeigen Sie, das in einem komplexen Hilbert–Raum H ein Operator $T \in L(H)$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.
2. Seien H ein Hilbert–Raum über $\mathbb{K}$, $A, B \in L(H)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Man beweise folgende Aussagen
   (a) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
   (b) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$,
   (c) $(AB)^* = B^* A^*$,
   (d) $I^* = I$ (Identität), $0^* = 0$ (Nulloperator),
   (e) A bijektiv $\Rightarrow$ A^* bijektiv und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
3. Sei H ein Hilbert–Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in L(H)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $(Tu, v) = 0 \ \forall u, v \in H \Rightarrow T = 0$,
   (b) $(Tu, u) = 0 \ \forall u \in H \Rightarrow T = 0$,
   (c) $T^*T = TT^* \Leftrightarrow \|Tu\| = \|T^*u\| \ \forall u$.
4. Sei $X = C^2([0, \pi], \mathbb{R})$ und $(u, v) := \int_0^\pi u(t)v(t)dt$ für $u, v \in X$. Weiter sei H die Vervollständigung von X bezüglich der induzierten Norm, $D := C_0^2((0, \pi), \mathbb{R})$ und $T : D \to H$ mit $Tu := -u'' + u$.
   (a) Man zeige: $(Tu, v) = (u, Tv) \ \forall u, v \in D$ und $\|u\| \leq \|Tu\| \ \forall u \in D$.
   (b) Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $v \in X \setminus \{ 0 \}$ mit $v \perp R(T)$ an. Damit folgt, dass $R(T)$ nicht dicht in H liegt.
5. Beweisen Sie Lemma 3.4.2:
   (a) Sei $T : H_1 \to H_2$ ein linearer Operator. Dann existiert $T^{-1} : R(T) \to H_1$ genau dann, wenn die Gleichung $Tx = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ zuläßt.
   (b) Ist T ein injektiver linearer Operator, so ist T^{-1} ein linearer Operator.

   Ist T^{-1} beschränkt, falls zusätzlich T beschränkt angenommen wird?

Klausurtermine:
12.12.07 zur Übungszeit und voraussichtlich 19.02.08.