



### Funktionalanalysis – Übungsblatt 8

Abgabe: bis 17. Dezember 2007, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

Fakultät für Mathematik und  
Wirtschaftswissenschaften  
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz  
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit  
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Es ist das Anfangswertproblem (AWP) für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

zu lösen.

1. Berechnen Sie die Fouriertransformation von  $e^{-a|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(a) für  $a \equiv \frac{1}{2}$  und

(b) für  $0 < a \in \mathbb{R}$  beliebig, konstant.

2. Berechnen Sie formal das Fouriertransformierte AWP zu obigem AWP für eine feste Zeit  $t$ .

3. Lösen Sie für festes  $y \in \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \hat{u}_t(y, t) + |y|^2 \hat{u}(y, t) = 0 & (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \hat{u}(y, 0) = \hat{f}(y) & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4. Zeigen Sie, dass (formal) für die Faltung  $(f \star g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$  von  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt:

(a)  $(f \star g)(x) = (g \star f)(x)$ ,

(b)  $\widehat{f \star g}(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$ .

5. Bestimmen Sie die Fourierinverse von  $\hat{f}(y)e^{-|y|^2 t}$  mit Hilfe von Aufgabe 4 und Aufgabe 1.

Bemerkung: unter "formal" verstehen wir hier, dass wir die Existenz der auftretenden Integrale, evtl. benötigte Eigenschaften von Funktionen etc. als gegeben voraussetzen. Ferner können auftretende Funktionen als "physikalisch sinnvoll" angenommen werden.