ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 9

Abgabe: bis 14. Januar 2008, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

1. Man zeige, dass der Sobolev–Raum $W^{m,2}(0,2\pi)$ isomorph zu dem Raum
$$\ell^{2,m} = \left\{ (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2; \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 (1+k^2)^m < \infty \right\}$$
ist.
Hinweis: in $L^2(0,2\pi)$ ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis.

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise orthogonaler Elemente eines Hilbert–Raumes H. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ist konvergent.
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ist schwach konvergent (d.h., die Folge der Partialsummen ist schwach konvergent).

3. Seien H ein separabler ∞–dimensionaler Hilbert–Raum und $T : H \to H$ ein beschränkter linearer Operator, dessen Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ die Bedingung
$$a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| > 1$$
erfüllt.
   (a) Man zeige: $\lim_{i,j\to\infty} a_{ij} = 0 \Leftrightarrow T$ ist kompakt.
   Hinweis: Man beachte die Punkte 4.2.10 und 4.4.3 der Vorlesung.
   (b) Man gebe einen kompakten linearen Operator an, dessen Hilbert–Schmidtsche Norm nicht endlich ist.