ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 10

Abgabe: bis 21. Januar 2008, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

1. Gegeben sei das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

   Bestimmen Sie mit Hilfe der Fredholmschen Sätze den Parameter b so, dass das Gleichungssystem lösbar ist.

2. Gegeben seien die stetigen Funktionen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$. Desweiteren sei der Integraloperator $Tx = \int_a^b k(t, s)x(s)ds$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x(t) - \lambda Tx(t) = g(t)$$

   für $|\lambda| < \left(\sup_{a \le t \le b} \int_a^b |k(t, s)|\, ds \right)^{-1}$ eine eindeutig bestimmte Lösung hat.

3. Sei T ein kompakter Hermitescher Operator in einem Hilbert–Raum H. Man betrachte die Gleichung

$$(\mathrm{Id} - \lambda T)\, x = y$$

   für vorgegebenes $y \in H$. Dabei sei $\lambda \neq \frac{1}{\mu_i}$ für alle Eigenwerte μ_i von T mit $\mu_i \neq 0$. Man gebe explizit die Lösung $x \in H$ an.