ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 11

Abgabe: bis 28. Januar 2008, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

1. Man zeige für $i \in \{1, \dots, n\}$:
   (a) der Operator $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : H^{1,2} \to L^2$ ist beschränkt,
   (b) der Operator $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : H^{\infty,2} \to H^{\infty,2}$ ist beschränkt und
   (c) der Operator $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : L^2 \to L^2$ ist dicht definiert und abgeschlossen.
2. Sei T ein abgeschlossener Operator. Beweisen Sie:
   (a) $T - \lambda I$ ist abgeschlossen und
   (b) falls T^{-1} existiert, so ist T^{-1} abgeschlossen.
3. Wir betrachten den linearen Differentialoperator

   $$D_x = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha(x) D^\alpha$$

   mit $k \in \mathbb{N}$ und den Koeffizienten $c_\alpha \in C^k(\Omega)$ auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ferner sei D die Menge der Funktionen $f \in L^2 \cap C^k(\Omega)$ für die gilt $D_x f(x) \in L^2(\Omega)$.
   Wir definieren den linearen Operator $T : D \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ durch $(Tf)(x) = D_x f(x)$.
   (a) Man zeige, dass T abschließbar ist.
   (b) Ist $T : W^{k,2}(\Omega) \cap \{ f \in W^{k,2}(\Omega) \mid D_x f \in L^2(\Omega) \} \to L^2$ abgeschlossen (Beweis)?