ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 12

Abgabe: bis 4. Februar 2008, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

1. Sei $H = L^2(-\pi, \pi)$ und

$$
\begin{aligned}
D(T_0) &= C_0^2(-\pi, \pi)\,, \\
D(T_1) &= \left\{\, u \in C^2[-\pi, \pi] \;\middle|\; u(-\pi) = u(\pi),\ u'(-\pi) = u'(\pi) \,\right\}\,, \\
D(T_2) &= \left\{\, u(x) = \sum_{k=-N_u}^{N_u} c_k e^{ikx} \;\middle|\; c_k \in \mathbb{C},\ N_u = N(u) \right\}\,, \\
D(T_3) &= \left\{\, u \in L^2(-\pi, \pi) \;\middle|\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^4 \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} u(x)\,dx \right|^2 < +\infty \right\}\,.
\end{aligned}
$$

Für $k = 0, 1, 2$ setzen wir

$$T_k u := -u''\,.$$

Für $u \in D(T_3)$ und $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ setzen wir

$$T_3 u := \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 c_k e^{ikx}\,.$$

Man beweise die folgenden Behauptungen:

(a) Die Operatoren T_k mit $k = 0, 1, 2, 3$ sind in $D(T_k)$ Hermitesch, aber nicht beschränkt.

(b) Es gilt $T_0 \subset T_1 \subset T_3$ und $T_2 \subset T_1 \subset T_3$, dabei ist für A, B zwei Operatoren $A \subset B$, wenn $D(A) \subset D(B)$ und $B\big|_{D(A)} = A$.

(c) T_1 und T_2 sind wesentlich selbstadjungiert, aber nicht selbstadjungiert.

(d) T_3 ist selbstadjungiert.

Hinweis: Aufgabenblatt 9.

2. Beweisen Sie: ein injektiver Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist (vergleiche Bemerkung 6.1.5).

Klausurtermin:
20.02.08.