ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Funktionalanalysis – Übungsblatt 13
Abgabe: bis 11. Februar 2008, 12:00 Uhr nach der Vorlesung

Analog zum Riemann–Integral (siehe Analysis I) definieren wir für eine monoton wachsende Funktion $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine beschränkte Funktion f Ober– und Untersummen für eine Partition $\pi : \pi_0 = a < \pi_1 < \ldots < \pi_n = b$

$$S(\pi, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{=:M_i} \underbrace{(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))}_{=:\triangle\alpha(x_i)}, \quad s(\pi, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{=:m_i} \triangle\alpha(x_i)$$

Falls $\inf_\pi S(\pi, f, \alpha) = \sup_\pi s(\pi, f, \alpha)$ so bezeichnen wir diesen Wert als *(Riemann–) Stieltjes–Integral* von f in Bezug auf α, sagen f ist *Stieltjes–integrierbar* auf $[a,b]$ bezüglich α, $f \in R(\alpha)$, und schreiben für den Wert

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x) .$$

1. Man beweise die folgenden Behauptungen:

   (a) Für eine Verfeinerung π' einer Partition π, d.h. $\pi \subset \pi'$, gilt

   $$s(\pi, f, \alpha) \leq s(\pi', f, \alpha), \quad \text{und} \quad S(\pi', f, \alpha) \leq S(\pi, f, \alpha) .$$

   (b) $\inf_\pi S(\pi, f, \alpha) \geq \sup_\pi s(\pi, f, \alpha)$.

   (c) Falls $f \in R(\alpha_1)$ und $f \in R(\alpha_2)$, dann ist $f \in R(\alpha_1 + \alpha_2)$ und es gilt

   $$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

   Weitere Eigenschaften des Stieltjes–Integrals folgen (ebenfalls) analog zum Riemann–Integral.

2. Wir definieren die Einheitsstufenfunktion $\theta(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$.

   (a) Man zeige: für $a < t < b$, f beschränkt auf $[a,b]$, f stetig in t und $\alpha(x) = \theta(x - t)$ ist

   $$\int_a^b f d\alpha = f(t) .$$

   (b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent mit $c_n \geq 0$, $\{t_n\}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten in (a,b) und $\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \theta(x - t_n)$. Beweisen Sie, dass für eine auf $[a,b]$ stetige Funktion f gilt

   $$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f(t_n) .$$

Bitte wenden.

3. Eine Funktion $\rho[a,b] \to \mathbb{R}$ nennen wir *von beschränkter Variation* und schreiben $\rho \in BV[a,b]$, wenn für alle Partitionen π von $[a,b]$

$$\sum_{k=1}^{n(\pi)} |\rho(x_k) - \rho(x_{k-1})| \leq M < \infty$$

gilt. Das Supremum dieser Summe über alle Partitionen bezeichnen wir mit $\displaystyle\int_a^b |d\rho|$.

   (a) Man zeige, dass für $\rho \in BV[a,b]$ und $a < x < b$ gilt:

   $$\int_a^x |d\rho| + \int_x^b |d\rho| = \int_a^b |d\rho|$$

   (b) Beweisen Sie: Jede Funktion $\rho \in BV[a,b]$ lässt sich darstellen in der Form

   $$\rho(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x) \quad x \in [a,b]\ .$$

   Dabei sind $\rho_1, \rho_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte monoton wachsende Funktionen.
   Hinweis: konstruieren Sie mit 3a eine geeignete Funktion ρ_1.

Klausurtermin:
20.02.08., 10:00 Uhr, Helmholtzstraße 18, Raum 220.