ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Nichtlineare Funktionalanalysis - Übung 4

Abgabe: 5. November 2007, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5*	Summe
Soll	6	6	6	3	4	21+4
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n \in C^2(\overline{B})$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \partial B$.
   (a) Zeigen Sie bitte, dass $\int_B J_f(x)\,dx = 0$ gilt.
   (b) Zeigen Sie bitte, dass auf die Voraussetzung n ungerade nicht verzichtet werden kann.

2. Es sei $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion mit kompakten Träger. Zu $\varepsilon > 0$ sei f_ε die Glättung von f. Zeigen Sie bitte die folgenden Aussagen:
   (a) $D_i(f_\varepsilon) = (D_i f)_\varepsilon$ in $\mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, n$, d.h. Differentiation und Glättungsoperation kommutieren.
   (b) $\|f - f_\varepsilon\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.
   (c) $\|D_i f_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le \|D_i f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$.

3. Sei $K \subset V$ eine kompakte Teilmenge eines Banachraums. Seien $T_i : K \to K$ eine Folge stetiger Operatoren, welche gleichmäßig gegen T konvergieren, d.h.
$$\lim_{i\to\infty} \sup_{x\in K} \|T_i(x) - T(x)\| = 0.$$
   Zeigen sie bitte:
   (a) T ist stetig.
   (b) Wenn jedes T_i einen Fixpunkt hat, so hat auch T einen Fixpunkt.

4. Gegeben seien n Spaltenvektoren $V_1(t), \ldots, V_n(t) \in \mathbb{R}^n$, welche differenzierbar vom Parameter $t \in [a, b]$ abhängen. Zeigen Sie bitte, dass dann
$$\frac{d}{dt}\det\left(V_1(t), \ldots, V_n(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(V_1(t), \ldots, V_{i-1}(t), \frac{d}{dt}V_i(t), V_{i+1}(t), \ldots, V_n(t)\right)$$
   gilt.

5*. Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Einheitskugel und $T : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft $T(\partial B) \subset B$. Zeigen Sie bitte, dass T einen Fixpunkt hat.