ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Geben Sie bitte eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe und nicht-leere Teilmenge A eines Banachraumes und einen stetigen Operator $T : A \to A$ an, der keinen Fixpunkt hat. Hinweis: Betrachten Sie l^1 zusammen mit dem Shift-Operator.

2. Zeigen Sie bitte die Äquivalenz der drei Aussagen:
   (i) M ist präkompakt.
   (ii) Jede diskrete Teilmenge von M ist endlich.
   (iii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $x_i \in M$ für $i = 1, \ldots, N$ mit
   $$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i).$$

3. Beweisen Sie bitte den Satz von Frobenius für nicht-negative Matizen: Jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit nicht-negativen Einträgen $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ besitzt einen reellen, nicht-negativen Eigenwert mit dazugehörigem Eigenvektor $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, welcher nicht-negative Einträge $\xi_i \geq 0$ hat.
   Kann man das Leraysche Eigenwertproblem mit dieser Methode auf nicht-negative Integralkerne verallgemeinern?

4. Sei V ein Banachraum und $T : V \to V$ vollstetig, sei weiter $S : V \to V$ stetig. Untersuchen Sie bitte die Operatoren
   $$S \circ T, \qquad T \circ S$$
   auf Vollstetigkeit.

5*. Sei $A \subset V$ eine Teilmenge eines Banachraums und $T : A \to V$ vollstetig. Zeigen Sie bitte: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein Operator $T_\varepsilon : A \to V$ mit endlich-dimensionalem Bild und
   $$\sup_{x\in A} \|T(x) - T_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon.$$