ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. (a) Seien $b_i, c : B \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ stetige Funktionen. Weiter gelte $c < 0$ in B. Zeigen Sie bitte, dass das Problem

$$u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B}), \qquad \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = 0 \quad \text{in} \quad B, \qquad u|_{\partial B} \equiv 0$$

nur die Lösung $u \equiv 0$ zuläßt.

(b*) Zeigen Sie die Aussage von Teilaufgabe (a) unter der allgemeineren Bedingung $c \leq 0$.

(c) Sei $g : \overline{B} \to \mathbb{R} \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) = g(x) - \int_B \varphi(y,x) \Delta g(y)\, dy$$

der Regularitätsklasse $C^{2,\alpha}(\overline{B})$ angehört und Lösung des Dirichletproblems

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}), \qquad \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad B, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{für} \quad x \in \partial B$$

ist, wobei φ die Greensche Funktion der Kugel ist.

(d) Seien $b_i, c, f : \overline{B} \to \mathbb{R} \in C^{0,\alpha}(\overline{B})$. Sei weiter $g : \overline{B} \to \mathbb{R} \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ eine Funktion. Lösen Sie bitte das Dirichlet-Randwertproblem

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}), \qquad \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f \quad \text{in} \quad B, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{für} \quad x \in \partial B.$$

(e) Betrachten Sie bitte die Funktion $f : \overline{B} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^{0,\alpha}(\overline{B} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f\|_{C^0(\overline{B} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Lösen Sie bitte das Dirichlet-Randwertproblem

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}), \qquad \Delta u = f(x, u, \nabla u) \quad \text{in} \quad B, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{für} \quad x \in \partial B$$

mit g aus Teilaufgabe (c).

2. Sei V ein Banachraum. Zu linearem $K : V \to V$ betrachte die Funktion

$$\|K\| := \sup_{\|x\|=1} \|Kx\|.$$

   (a) Zeigen Sie bitte: $\|K\| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad K$ ist stetig.

   (b) Sei $L(V) := \{K : V \to V \,:\, K \text{ ist stetig }\}$. Zeigen Sie bitte, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $L(V)$ ist.

   (c) Zeigen Sie bitte, dass $L(V)$ mit der oben angebenen Norm ein Banachraum wird.

3. Sei V ein Banachraum und sei $K : V \to V$ ein linearer Operator für den die Potenz K^n vollstetig ist für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie bitte, dass sich die Eigenwerte von K nur bei Null häufen können und alle von Null verschiedenen Eigenwerte endliche Vielfachheit haben. Finden Sie einen linearen, nicht vollstetigen Operator, für den eine Potenz vollstetig ist.