ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Betrachten Sie bitte das Funktional

$$F(u) := \int_0^1 ((u'(x))^2 - 1)^2 \, dx.$$

   (a) Sei F definiert auf $\{v \in C^1[0,1] : v(0) = v(1) = 0\}$. Zeigen Sie bitte, dass F auf diesem Raum zwar beschränkt ist, aber kein Minimum annimmt. Bestimmen Sie bitte das Infimum von F.

   (b) Sei F definiert auf $\{v \in C^{0,1}[0,1] : v(0) = v(1) = 0\}$. Zeigen Sie bitte, dass F sein Minimum in unendlich vielen Punkten annimmt. Geben Sie eine gegen $u \in C^{0,1}[0,1]$ in $C^0[0,1]$ konvergente Folge u_k mit $F(u_k) = argminF$ und $\lim_{k\to\infty} F(u_k) < F(u)$ an.

2. (a) Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie bitte $fg \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$D_i(fg) = (D_i f)g + f\partial_i g \quad \text{in} \quad \Omega.$$

   (b) Sei Ω zusätzlich konvex. Zeigen Sie bitte: Für alle $u \in V \cap C^1(\Omega)$ gilt die Gleichung

$$\|\nabla u\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$