



Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Betrachten Sie bitte das Funktional

$$Z(\check{z}) = \int_0^1 ((\check{z}^0(t))^2 - 5t) dt$$

- (a) Sei \check{z} definiert auf $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\check{z}(t) = 2t$. Zeigen Sie bitte, dass Z auf dem Raum $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ zwar beschränkt ist, aber kein Minimum annimmt. Bestimmen Sie bitte das Infimum von Z .
- (b) Sei \check{z} definiert auf $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\check{z}(t) = 2t$. Zeigen Sie bitte, dass sein Minimum in unendlich vielen Punkten aus $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ annimmt.
- (c) Zeigen Sie bitte, dass Z auf $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ nicht unterhalb stetig ist. Geben Sie dazu eine Folge $\{\check{z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ an, welche gleichmäßig gegen ein $\check{z} \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ konvergiert und den Bedingungen $Z(\check{z}_n) < Z(\check{z}) - \frac{1}{n}$ und $Z(\check{z}) < Z(\check{z}_n) + \frac{1}{n}$ genügt.

2. (a) Sei $\check{z} \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ und $\check{z}(0) = 1$. Zeigen Sie bitte $\check{z}(1) \geq 1$ und

$$\int_0^1 \check{z}'(t) dt = \check{z}(1) - \check{z}(0) \text{ in } \mathbb{R}$$

- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\check{z} \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ mit $\check{z}(0) = 1$ f.ü. in n . Zeigen Sie bitte, dass dann $\check{z}(1) = 1$ f.ü. in n gilt.

3. Seien $\check{z} \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Zeigen Sie bitte:

(a)

$$\int_0^1 \check{z}'(t) dt = \int_0^1 \check{z}(t) dt - \int_0^1 \check{z}(t)^2 dt \text{ in } \mathbb{R}$$

(b)

$$\check{z}'(t) = \begin{cases} \check{z}(t) & \text{falls } \check{z}(t) > 0 \\ -\check{z}(t) & \text{falls } \check{z}(t) < 0 \end{cases} \text{ fast überall in } [0, 1]$$

wobei \check{z}' die schwache Ableitung bezeichnet.

Frohes Fest!