ulm university universität
uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Nicht jedes Variationsproblem ist zu beliebigen Randwerten lösbar! Betrachten Sie dazu mit einem $R > 1$ den Kreisring

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < |x| < R \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit dem Flächeninhaltsfunktional

$$F(u) := \iint_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx.$$

Um das Problem nicht allzu kompliziert werden zu lassen, sei F auf der Menge

$$V := \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) \,:\, v(x) = 0,\ |x| = 1,\ v(x) = v_0,\ |x| = R \right\}$$

mit einem $v_0 \in \mathbb{R}$ erklärt. Bearbeiten Sie bitte die folgenden Aufgaben.

(a) Zeigen Sie: Wenn $u \in V$ ein kritischer Punkt von F in V ist, so ist u rotationssymetrisch, d.h. es gilt $|x| = |y| \;\Rightarrow\; u(x) = u(y)$.

(b) Sei

$$W := \left\{ \varrho \in C^2[1, R] \,:\, \varrho(1) = 0,\ \varrho(R) = v_0 \right\}$$

der Definitionsbereich des Funktionals

$$G(\varrho) := \int_1^R r\sqrt{1 + (\varrho'(r))^2}\, dr.$$

Zeigen Sie: Wenn $u \in V$ ein kritischer Punkt von F in V ist, so ist $\varrho = \varrho(r) \in W$ definiert durch die Gleichung $u(x) = \varrho(|x|)$ ein kritischer Punkt von G in W.

(c) Zeigen Sie, dass

$$0 = \frac{d}{dr}\left(\frac{r\varrho'(r)}{\sqrt{1 + (\varrho'(r))^2}} \right)$$

die Euler-Lagrange Gleichung von G darstellt.

(d) Zeigen Sie: Sei $\varrho \in W$ ein kritischer Punkt von G in W, so ist für $x \in \Omega$ die Funktion $u(x) := \varrho(|x|) \in V$ und Lösung der Minimalflächengleichung

$$(1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Folglich ist u damit ein kritischer Punkt von F.

(e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung ϱ der Euler-Lagrange Gleichung von G.

(f) Sei $0 < c < 1$ ein Parameter. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(c) := \pm c\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{R}{c}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{c}\right) \right)$$

eine beschränkte Funktion ist.

(g) Unter welcher Voraussetzung an v_0 gibt es kritische Punkte $u \in V$ des Funktionals F in V?