ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Übungen - Partielle Differentialgleichungen

Abgabe: bis 9. Mai 2007, 14:00 Uhr nach der Vorlesung

Name: **Vorname:**

Bitte geben Sie genau dann Lösungen ab, wenn Sie bereit sind, Ihre Lösungen auch in der Übung vorzurechnen. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein, Sie können dabei auf Fakten aus der Vorlesung verweisen. Formulieren Sie alle weiteren Aussagen aus und beweisen Sie sie gegebenenfalls.

4. Beweisen Sie die folgenden Korollare zum Gaußschen Satz
   (a) Partielle Integration: Seien $u, v \in C^1(U) \cap C^0(\overline{U})$. Dann gilt
   $$\int_U u_{x_i} v dx = -\int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu_i dS.$$
   (b) Seien $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$. Dann gilt:
   $$\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$
   (c) Seien $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$. Dann gilt $\displaystyle\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$,
   mit $\displaystyle\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ Laplace–Operator und $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial \nu} = Du \cdot \nu$ (äußere) Normalenableitung von u.

5. Gaußscher Satz
   (a) Berechnen Sie die Normale an die Oberfläche n–dimensionalen Kugel B mit Mittelpunkt a und Radius r, d.h. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - a| \leq r\}$.
   (b) Bestätigen Sie mit 5a den Gaußschen Satz für das Vektorfeld $u(x) = x$ auf der $(n-1)$–dimensionalen Einheitssphäre.

6. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{\partial G} u \cdot \nu dS$ für
   (a) $u = (xy^2, yz^2, x^2z)$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$
   (b) $u = \left(\sin(yz), e^{x^2}\cos(z) + y, ye^{y^4 - y^5} + z\right)$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$