ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Übungen - Partielle Differentialgleichungen

Abgabe: bis 23. Mai 2007, 14:00 Uhr nach der Vorlesung

Name: **Vorname:**

Bitte geben Sie genau dann Lösungen ab, wenn Sie bereit sind, Ihre Lösungen auch in der Übung vorzurechnen. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein, Sie können dabei auf Fakten aus der Vorlesung verweisen. Formulieren Sie alle weiteren Aussagen aus und beweisen Sie sie gegebenenfalls.

10. Sei U^+ die offene Halbkugel $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1, x_n > 0 \}$. Sei $u \in C^2(\overline{U^+})$ harmonisch in U^+ mit $u = 0$ auf $\partial U^+ \cap \{ x_n = 0 \}$. Setze

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

für $x \in U = U_1(0)$. Zeigen Sie, dass v harmonisch in U ist.

11. (a) Der Liouvillesche Satz gilt für eine harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, falls nur $u \leq C$ (beschränkt nach oben).

    (∗) Falls $n = 2$, dann gilt der Liouvillesche Satz, falls $u \leq C$ und falls u nur *subharmonisch* ist, d.h.

$$\Delta u(x) \geq 0 \text{ bzw. } u(x) \leq \fint_{\partial U_r(0)} u(y)dy$$

12. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\varepsilon > 0$ sei

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

mit

$$\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases},$$

dabei ist $c > 0$ so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$. Zeigen Sie

(a) $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$ und

(c) $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(0)}$.