ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Übungen - Partielle Differentialgleichungen

Abgabe: bis 6. Juni 2007, 14:00 Uhr nach der Vorlesung

Name: **Vorname:**

Bitte geben Sie genau dann Lösungen ab, wenn Sie bereit sind, Ihre Lösungen auch in der Übung vorzurechnen. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein, Sie können dabei auf Fakten aus der Vorlesung verweisen. Formulieren Sie alle weiteren Aussagen aus und beweisen Sie sie gegebenenfalls.

13. Seien u und u^2 harmonisch in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
    (a) $\exp(u(x))$ ist harmonisch in U.
    (b) u ist konstant U.
14. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\mathbf{G}(x,y) := \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{a}{|y|}\frac{1}{|x-\tilde{y}|} - \frac{1}{|x-\hat{y}|} + \frac{a}{|y|}\frac{1}{|x-\bar{y}|}\right)$$
mit
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \frac{a^2}{|y|^2}y, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \frac{a^2}{|y|^2}\hat{y},$$
eine Greensche Funktion für die obere Halbkugel
$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| < a, x_3 > 0 \right\}$$
ist.
15. Zeigen Sie
    (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos(\varphi-\theta)}d\theta = 2\pi.$
    (b) $\displaystyle\int_U \mathbf{G}(x,y)dy = -\frac{|x|^2-1}{2n}$, dabei ist $\mathbf{G}(x,y)$ die Greensche Funktion für das Gebiet U.