ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Übungen - Partielle Differentialgleichungen

Abgabe: bis 27. Juni 2007, 14:00 Uhr nach der Vorlesung

Name: **Vorname:**

Bitte geben Sie genau dann Lösungen ab, wenn Sie bereit sind, Ihre Lösungen auch in der Übung vorzurechnen. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein, Sie können dabei auf Fakten aus der Vorlesung verweisen. Formulieren Sie alle weiteren Aussagen aus und beweisen Sie sie gegebenenfalls.

19. Zeigen Sie, es existiert $w \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ mit

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| \geq 1 \\ 0 & |t| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

20. Sei u glatt und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

    (a) Zeigen Sie, dass $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung löst.

    (b) Zeigen Sie mit 20a, dass $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

21. Sei $n = 1$ und $u(x,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$.

    (a) Zeigen Sie, es gilt $u_t = u_{xx}$ genau dann, wenn

    $$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z > 0). \tag{1}$$

    (b) Zeigen Sie, dass

    $$v(z) = c\int_0^z e^{-\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds + d$$

    die allgemeine Lösung von (1) ist.

    (c) Differenzieren Sie $v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ nach x und wählen Sie c so, dass Sie die Grundlösung Φ für $n = 1$ erhalten.