ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Übungen - Partielle Differentialgleichungen

Abgabe: bis 4. Juli 2007, 14:00 Uhr nach der Vorlesung

Name: **Vorname:**

Bitte geben Sie genau dann Lösungen ab, wenn Sie bereit sind, Ihre Lösungen auch in der Übung vorzurechnen. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein, Sie können dabei auf Fakten aus der Vorlesung verweisen. Formulieren Sie alle weiteren Aussagen aus und beweisen Sie sie gegebenenfalls.

Hinweis: Um die Aufgaben dieser Übungsserie vollständig lösen zu können, werden Kenntnisse über Fourierreihen benötigt.

22. Lösen Sie für $u : [0, L] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ das Randanfangswertproblem für die 1–dimensionale Wärmeleitungsgleichung (eindimensionaler Stab mit Anfangstemperatur T_0)

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= T_0 \quad \forall x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

durch Separation der Variablen, d.h. mit dem Ansatz $u(x, t) = u_1(x) \cdot u_2(t)$.

(a) Zeigen Sie zunächst: $\exists k \in \mathbb{R} : \frac{u_1''}{u_1} = \frac{u_2'}{u_2} = k$ und lösen Sie die daraus resultierenden gewöhnlichen Differenzialgleichungen für u_1, u_2.

(b) Bestimmen Sie dann die Koeffizienten der Fourierreihe der Lösungen zu den gegebenen Anfangswerten.

23. Bestimmen Sie eine Lösung $u : [0, L] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Wärmeleitungsgleichung zu den Randanfangswerten:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= T_0 \quad \forall x \in [0, L], \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) &= T_2 \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Finden Sie zunächst eine Lösung für den stationären Fall, d.h. $u(x, t) = u(x)$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 22 und 23a die Lösung von (2)

24. Es sei $U := (0, a) \times (0, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$. Man löse das Randanfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x, y, t) - \Delta u(u, x, t) &= 0 & (x, y) &\in U, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) & (x, y) &\in U, \\ u(x, y, t) &= 0 & (x, y, t) &\in \partial U \times (0, \infty) \end{aligned} \tag{3}$$

durch Separation der Variablen, d.h. $u(x, y, t) = u_1(x) \cdot u_2(y) \cdot u_3(t)$ für eine vorgegebene Funktion $f(x, y)$ analog zu Aufgabe 22.