ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Übungen - Partielle Differentialgleichungen

Abgabe: bis 11. Juli 2007, 14:00 Uhr nach der Vorlesung

Name: **Vorname:**

Bitte geben Sie genau dann Lösungen ab, wenn Sie bereit sind, Ihre Lösungen auch in der Übung vorzurechnen. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein, Sie können dabei auf Fakten aus der Vorlesung verweisen. Formulieren Sie alle weiteren Aussagen aus und beweisen Sie sie gegebenenfalls.

25. Eine Funktion v, die C^1 bezüglich x, t, C^2 bezüglich x in U_T ist, heißt *Sublösung* der Wärmeleitungsgleichung, falls
$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ in } U_T.$$
   (a) Zeigen Sie, dass für eine Sublösung v
   $$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds$$
   für alle $E(x,t;r) \subset U_T$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass deshalb $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$.
   (c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und konvex und u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Beweisen Sie, dass $v := \phi(u)$ eine Sublösung ist.
   (d) Zeigen Sie, dass $v := |Du|^2 + u_t^2$ eine Sublösung der Wärmeleitungsgleichung ist, wenn u die Wärmeleitungsgleichung löst.

26. Lösen Sie jeweils die Wellengleichung
$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \; u(x,0) = g(x), \; u_t(x,0) = h(x), \; x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$
und skizzieren Sie $u(x,t)$ in den Zeitpunkten $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{A}{2}$, $t_2 = A$ und $t_3 = 2A$, $A > 0$.
   (a) $g(x) = \begin{cases} c - \frac{c}{A}|x|, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A, \end{cases}$ und $h(x) = 0$ für $c > 0$,
   (b) $g(x) = 0$ und $h(x) = \begin{cases} c, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A, \end{cases}$ für $c > 0$.

27. $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ löse das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung:
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{\, t = 0 \,\}. \end{cases}$$
Es seien $\operatorname{supp} g$ und $\operatorname{supp} h$ kompakt. Die *kinetische Energie* ist $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)dx$ und die *potenzielle Energie* ist $p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)dx$.
Beweisen Sie: $k(t) + p(t)$ ist konstant in t.