



ulm university universität  
**uulm**

Vorlesungsmanuskript zu  
**Differentialgleichungen II**

Werner Balser  
Institut für Angewandte Analysis

Sommersemester 2010



# Bücher zur Vorlesung

- [1] **L. V. Ahlfors**, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, dritte Aufl., 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. 39
- [2] **H. Amann**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983.
- [3] **V. I. Arnol'd**, *Geometrische Methoden in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.
- [4] ———, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Hochschulbücher für Mathematik, 83, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, zweite Aufl., 1991.
- [5] **M. Braun**, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, Springer-Lehrbuch, Berlin, dritte Aufl., 1994.
- [6] **E. A. Coddington und N. Levinson**, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955. 25, 35
- [7] **L. Collatz**, *Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, siebte Aufl., 1990. Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen.
- [8] **H. Heuser**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, fünfte Aufl., 2006. Einführung in Lehre und Gebrauch.
- [9] **G. Jank und L. Volkmann**, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, UTB für Wissenschaft: Grosse Reihe, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985.
- [10] **H. Knapp**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Rudolf Trauner, Linz, 1982.
- [11] **K. Meyberg und P. Vachenaue**r, *Höhere Mathematik 2*, Springer, Berlin, 1999. 57
- [12] **A. Peyerimhoff**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen. I*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, zweite Aufl., 1982. Studienbuch für Studierende der Mathematik und aller Naturwissenschaften ab 3. Semester.
- [13] ———, *Gewöhnliche Differentialgleichungen. II*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1982.
- [14] **F. W. Schäfke und D. Schmidt**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1973. Die Grundlagen der Theorie im Reellen und Komplexen, Heidelberger Taschenbücher, Band 108.
- [15] **W. W. Stepanow**, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, Hochschulbücher für Mathematik, 20, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- [16] **W. Walter**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, fünfte Aufl., 1993. Eine Einführung.
- [17] **H. Werner und H. Arndt**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Eine Einführung in Theorie und Praxis.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Unendlich-dimensionale Differentialgleichungssysteme</b>	<b>5</b>
1.1	Ableitung und Riemann-Integral . . . . .	5
1.2	Der Satz von Picard-Lindelöf im Banachraum . . . . .	10
1.3	Anwendungen . . . . .	12
1.4	Differentialgleichungen in einer komplexen Variablen . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Stabilität</b>	<b>16</b>
2.1	Lipschitz-stetige Differentialgleichungssysteme . . . . .	16
2.2	Definition und einfache Eigenschaften der Stabilität . . . . .	19
2.3	Gestörte lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	19
2.4	Autonome Systeme . . . . .	22
2.5	Gleichgewichtslösungen bei autonomen Systemen . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Eigenwertaufgaben</b>	<b>25</b>
3.1	Ein Beispiel . . . . .	25
3.2	Selbstadjungiertheit . . . . .	26
3.3	Die Greensche Funktion . . . . .	29
3.4	Der Greensche Operator . . . . .	31
3.5	Die Vollständigkeit der Eigenfunktionen . . . . .	32
3.6	Probleme mit Gewichtsfunktion . . . . .	33
3.7	Singuläre Randwertprobleme . . . . .	35
3.8	Weitere Beispiele . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen in der komplexen Ebene</b>	<b>37</b>
4.1	Analytische Fortsetzung von Lösungen . . . . .	37

4.2	Singuläre Punkte . . . . .	39
4.3	Singularitäten erster Art . . . . .	41
4.4	Skalare Gleichungen höherer Ordnung . . . . .	44
4.5	Die Frobenius-Methode . . . . .	45
4.6	Reguläre Singularitäten . . . . .	47
4.7	Die hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	48
4.8	Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Separation der Variablen</b>	<b>52</b>
5.1	Die schwingende Saite . . . . .	52
5.1.1	Die homogene Gleichung . . . . .	52
5.1.2	Die inhomogene Gleichung . . . . .	55
5.2	Das Dirichlet-Problem . . . . .	55
5.3	Die schwingende Kreisscheibe . . . . .	56
5.4	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	57

# Kapitel 1

## Unendlich-dimensionale Differentialgleichungssysteme

In diesem Kapitel wollen wir bekannte Resultate für Differentialgleichungssysteme, wie z. B. den Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf, wiederholen bzw. verallgemeinern: Einmal wollen wir Systeme unendlicher Dimension betrachten, und zum anderen wollen wir zulassen, dass die unabhängige Variable des Systems eine komplexe Veränderliche ist, so dass wir Resultate der Funktionentheorie benutzen können. Dabei wird  $\mathbb{X}$  immer ein fest gewählter, aber beliebiger Banachraum über  $\mathbb{K}$  sein, wobei  $\mathbb{K}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sein darf. Mit  $\mathcal{L}(\mathbb{X})$  sei die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von  $\mathbb{X}$  in sich bezeichnet. Mit  $\mathbb{X}'$  bezeichnen wir die Menge aller stetigen linearen Funktionale auf  $\mathbb{X}$ , das heißt die Menge aller linearen Abbildungen  $\phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$ , welche im Sinn der Norm stetig auf  $\mathbb{X}$  sind. Hierbei ist die Stetigkeit bekanntlich äquivalent zur Beschränktheit von  $\phi \in \mathbb{X}'$ , und wir setzen wie üblich

$$\|\phi\| = \sup_{x \in \mathbb{X}, \|x\| \leq 1} |\phi(x)|.$$

Wir betrachten im Folgenden meist Funktionen, die auf einer Menge  $D \subset \mathbb{K}$  definiert sind und Werte in  $\mathbb{X}$  haben. Diese werden gelegentlich auch  $\mathbb{X}$ -wertige Funktionen heißen, um sie von solchen mit Werten in  $\mathbb{K}$  zu unterscheiden. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist  $D$  meist ein Intervall, und im anderen Falle ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ , d. h., eine offene und zusammenhängende Menge von komplexen Zahlen.

In der linearen Algebra ist es üblich, bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl diese links vom Vektor zu schreiben. Hier wird es bequem sein (z. B. bei den unten eingeführten Riemann-Summen), von dieser Konvention abzuweichen und zu erlauben, dass die Zahl auch rechts stehen kann!

### 1.1 Ableitung und Riemann-Integral

Im Folgenden sei  $\mathbb{X}$ , wie oben schon gesagt, immer ein Banachraum. Weiter sei, wenn nichts anderes gesagt wird,  $I$  ein nicht-triviales<sup>1</sup> reelles Intervall, und  $f$  eine auf  $I$  definierte  $\mathbb{X}$ -wertige Funktion.

**Definition 1.1.1 (Ableitung und Stammfunktion)** Wir nennen  $f$  in einem Punkt  $t_0 \in I$  differenzierbar, wenn der Differenzenquotient

$$(t - t_0)^{-1} (f(t) - f(t_0)), \quad t \neq t_0, t \in I,$$

für  $t \rightarrow t_0$  einem Grenzwert zustrebt, und diesen bezeichnen wir dann mit  $f'(t_0)$  und nennen ihn die Ableitung von  $f$  im Punkt  $t_0$ . Falls  $t_0$  einer der Randpunkte von  $I$  ist, ist dies natürlich die entsprechende

<sup>1</sup>Dies soll heißen, dass  $I$  mehr als einen Punkt enthält.

*einseitige Ableitung. Wenn  $f$  in jedem Punkt von  $I$  differenzierbar ist, dann sagen wir auch:  $f$  ist auf  $I$  differenzierbar. Wir nennen eine Funktion  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  auf  $I$ , wenn  $F$  dort differenzierbar und  $f$  gleich der Ableitung von  $F$  ist.*

Das folgende Lemma zur Ableitung von  $\phi \circ f$  und das analoge Resultat für Integrale ist auf den ersten Blick vielleicht überraschend, wird aber sofort verständlich, wenn man sich klar macht dass eine lineare Abbildung bei endlich-dimensionalen Vektorräumen der Multiplikation mit einer konstanten Matrix entspricht.

**Lemma 1.1.2 (Rechenregeln)**

- (a) *Ist  $f$  auf  $I$  konstant, so ist  $f$  dort differenzierbar, und  $f'(t) = 0$  für alle  $t \in I$ .*
- (b) *Ist  $f$  in  $t_0 \in I$  differenzierbar, und ist  $\phi \in \mathbb{X}'$ , so ist auch  $\phi \circ f$  in  $t_0$  differenzierbar, und es gilt*

$$(\phi(f(t_0)))' = \phi(f'(t_0)).$$

- (c) *Sind  $F$  und  $G$  Stammfunktionen zur gleichen Funktion  $f$  auf  $I$ , so ist  $F - G$  auf  $I$  konstant.*

**Beweis:** Der erste Teil der Behauptung ist klar nach Definition der Ableitung. Sei jetzt  $\phi \in \mathbb{X}'$  gegeben. Wegen der Stetigkeit von  $\phi$  folgt sofort

$$\phi\left((t - t_0)^{-1} (f(t) - f(t_0))\right) \rightarrow \phi(f'(t_0)) \quad (t \rightarrow t_0).$$

Andererseits ist aber wegen der Linearität von  $\phi$  die linke Seite gleich  $(t - t_0)^{-1} (\phi(f(t)) - \phi(f(t_0)))$ , woraus (b) folgt. Wenn  $F$  und  $G$  Stammfunktionen zu  $f$  sind, dann folgt aus dem soeben Bewiesenen für jedes  $\phi \in \mathbb{X}'$  dass  $\phi \circ F$  und  $\phi \circ G$  zwei Stammfunktionen zur  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktion  $\phi \circ f$  sind. Daher ist  $\phi \circ F - \phi \circ G = \phi \circ (F - G)$  konstant. Hieraus folgt (mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach) die Konstanz von  $H := F - G$ , denn wenn  $H(t_1) \neq H(t_2)$  wäre, so gäbe es ein  $\phi \in \mathbb{X}'$  mit  $\phi(H(t_1)) \neq \phi(H(t_2))$ . Beachte dass diese typische Schlussweise auch später noch angewandt wird, um das Bestehen von Gleichungen zwischen Vektoren zu zeigen! □

**Aufgabe 1.1.3 (Weitere Rechenregeln)** *Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{X}$  und  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{K}$  differenzierbar im Punkt  $t_0 \in I$ . Zeige:*

- (a)  *$s := f + g$  ist in  $t_0$  differenzierbar, und  $s'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$ .*
- (b)  *$p := \alpha f$  ist in  $t_0$  differenzierbar, und  $p'(t_0) = \alpha'(t_0) f(t_0) + \alpha(t_0) f'(t_0)$ .*

*Überlege selbst, wie sich die Quotientenregel verallgemeinert und, falls  $\mathbb{X}$  ein Hilbertraum ist, welche Regel für die Ableitung des inneren Produkts gilt.*

**Aufgabe 1.1.4** *Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ , und sei  $x_0 \in \mathbb{X}$ . Zeige:*

- (a) *Für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist die Reihe*

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

*konvergent, und es gilt  $e^{t_1 A} e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A}$  für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .*

- (b) *Die durch die Reihe gegebene  $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ -wertige Funktion ist an jeder Stelle  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar, und*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A \circ e^{tA} = e^{tA} \circ A \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Untersuche weiter, wie auch folgende Aussage bewiesen werden kann: Wenn  $A(t)$  eine  $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ -wertige, auf  $I$  differenzierbare Funktion ist, und wenn  $A'(t)$  und  $A(t)$  für jedes feste  $t \in I$  kommutieren, dann gilt

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(t) \circ e^{A(t)} = e^{A(t)} \circ A'(t) \quad \forall t \in I.$$

Finde ein Beispiel dafür, dass diese Aussage falsch ist, wenn man die Voraussetzung, dass  $A'(t)$  und  $A(t)$  für jedes feste  $t \in I$  kommutieren, fallen lässt.

**Definition 1.1.5 (Integral)** Sei jetzt  $I = [a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall. Wie in den Grundvorlesungen Analysis definieren wir für jede Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$  und jede Wahl eines Zwischenpunktvektors  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)^T$  mit  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $1 \leq k \leq N$ , die zugehörige Riemann-Summe als den Vektor

$$S(\mathcal{Z}, \tau) := \sum_{k=1}^N f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Wir nennen  $f$  über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, wenn es einen Vektor in  $\mathbb{X}$  gibt, den wir dann mit  $\int_a^b f(t) dt$  bezeichnen und Integral von  $f$  über  $[a, b]$  nennen, für welchen folgendes gilt:

- Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine Zerlegung  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  von  $[a, b]$ , so dass für jede Verfeinerung  $\mathcal{Z}$  von  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  und jede Wahl des Zwischenpunktvektors  $\tau$  gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt - S(\mathcal{Z}, \tau) \right\| < \varepsilon. \quad (1.1.1)$$

Wenn dies so ist, dann ist das Riemann-Integral von  $f$  über  $[a, b]$  eindeutig bestimmt, und es ergibt sich sofort die Konvergenz mindestens einer zulässigen Folge von Riemann-Summen gegen das Integral. Dass sogar alle zulässigen Folgen von Riemann-Summen gegen das Integral konvergieren, zeigen wir im nächsten Satz.

**Aufgabe 1.1.6** Zeige: Genau dann ist  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  von  $[a, b]$  gibt, so dass für alle Verfeinerungen  $\mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{Z}}$  von  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren  $\tau, \tilde{\tau}$  gilt

$$\| S(\mathcal{Z}, \tau) - S(\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\tau}) \| < \varepsilon.$$

**Anleitung:** Zeige zunächst: Wenn die angegebene Bedingung erfüllt ist, dann gibt es eine zulässige Folge von Riemann-Summen  $(S(\mathcal{Z}_n, \tau_n))$  so, dass jedes  $\mathcal{Z}_m$  für  $m > n$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{Z}_n$  ist, und dass  $\|S(\mathcal{Z}_n, \tau_n) - S(\mathcal{Z}_m, \tau_m)\| < 1/n$  ist.

**Aufgabe 1.1.7** Zeige: Wenn  $f$  und  $g$  über  $[a, b]$  integrierbar sind, dann ist auch  $\alpha f + \beta g$ , für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , über  $[a, b]$  integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Zeige weiter: Für  $a \leq c \leq b$  ist  $f$  genau dann über  $[a, b]$  integrierbar, wenn es über beide Teilintervalle  $[a, c]$  und  $[c, b]$  integrierbar ist, und es gilt

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

**Satz 1.1.8** Mit obigen Bezeichnungen und Definitionen gilt:

- (a) Wenn  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar ist, dann ist  $f$  dort beschränkt, und es gilt die Fundamentalabschätzung

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq (b - a) \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|.$$

(b) Genau dann ist  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar, wenn alle zulässigen Folgen von Riemann-Summen konvergieren.

(c) Wenn  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar und  $\phi \in \mathbb{X}'$  ist, dann ist auch  $\phi \circ f$  über  $[a, b]$  integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \phi(f(t)) dt = \phi \left( \int_a^b f(t) dt \right).$$

(d) Wenn  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, dann existiert das Riemann-Integral von  $f$  über jedes abgeschlossene Teilintervall von  $[a, b]$ , und die Funktion

$$F(t) = \int_a^t f(u) du \quad \forall t \in [a, b]$$

ist Stammfunktion zu  $f$  auf  $[a, b]$ .

(e) Wenn  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar und  $F$  dort Stammfunktion zu  $f$  ist, dann folgt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \tag{1.1.2}$$

**Beweis:** Teil (a) folgt direkt aus der Definition des Integrals: Bei einem unbeschränkten Integranden kann man für eine beliebige Zerlegung  $\mathcal{Z}$  immer Zwischenpunkte so wählen, dass die zugehörige Riemann-Summe beliebig groß wird. Wenn dagegen  $f$  beschränkt ist, kann man jede Riemann-Summe mit der Dreiecksungleichung abschätzen und erhält daraus die Fundamentalabschätzung. Zum Beweis von (b) sei zunächst  $f$  als integrierbar vorausgesetzt. Dann gibt es nach (a) ein  $K$  so dass  $\|f(t)\| \leq K$  ist für alle  $t \in [a, b]$ . Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ , und sei  $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$  eine entsprechende Zerlegung wie in der Definition der Integrierbarkeit. Sei  $\mathcal{Z}_1 = \{a = u_0 < u_1 < \dots < u_M = b\}$  eine andere Zerlegung, deren Feinheit kleiner als das kürzeste Teilintervall von  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  ist, und sei ein beliebiger Zwischenpunktvektor  $\tau$  gewählt. Wir sehen dann: Zu jedem  $k$ ,  $1 \leq k \leq N - 1$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $j = j(k)$  so, dass  $u_{j-1} < t_k \leq u_j$  ist, und die Funktion  $k \mapsto j(k)$  ist streng monoton wachsend. Sei  $\mathcal{Z}_2$  so gebildet, dass die Teilpunkte  $u_{j(k)}$  in  $\mathcal{Z}_1$  durch  $t_k$  ersetzt werden, während die übrigen gleich bleiben. Dann ist  $\mathcal{Z}_2$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{Z}_\varepsilon$ , und wenn wir nötigenfalls die Zwischenpunkte  $\tau_{j(k)}$  anpassen, dann folgt mit der Integraldefinition dass der Abstand der Riemann-Summe für  $\mathcal{Z}_2$  vom Integralwert kleiner als  $\varepsilon$  ist. Andererseits ist der Unterschied der Riemann-Summen zu  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$  höchstens gleich  $3N K |\mathcal{Z}_1|$ , da wir nur  $N$  der Teilpunkte anpassen müssen, und da bei einer Änderung des zugehörigen Zwischenpunktes die Riemann-Summe um maximal  $3K |\mathcal{Z}_1|$  verändert wird. Wenn also  $\mathcal{Z}_1$  hinreichend fein ist, dann ist  $3N K |\mathcal{Z}_1| < \varepsilon$ , und dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left\| \int_a^b f(t) dt - S(\mathcal{Z}_1, \tau) \right\| < 2\varepsilon.$$

Daher muss jede zulässige Folge von Riemann-Summen gegen das Integral konvergieren. Wenn umgekehrt die Konvergenz jeder solcher Folge gesichert ist, folgt in der üblichen Weise zunächst dass alle diese Folgen den gleichen Grenzwert haben (den wir dann als Integral bezeichnen). Dann gilt aber

- Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  mit einer Feinheit  $|\mathcal{Z}| < \delta$  und jede Wahl eines Zwischenpunktvektors  $\tau$  die Ungleichung (1.1.1) gilt.

Wäre das nämlich nicht so, dann gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  so, dass eine zulässige Zerlegungsfolge existiert, für welche bei geeigneter Zwischenpunktwahl alle zugehörigen Riemann-Summen vom Integral um mindestens  $\varepsilon$  abweichen, was nicht sein kann. Aus dieser Ungleichung folgt aber die Integrierbarkeit von  $f$ . Die Aussage (c) ist klar, da wegen der Linearität von  $\phi$  für jede Riemann-Summe  $S(\mathcal{Z}, \tau)$  immer gilt

$$\phi(S(\mathcal{Z}, \tau)) = \sum_{k=1}^N \phi(f(\tau_k)) (t_k - t_{k-1}),$$



und da wegen der (Folgen-)Stetigkeit von  $\phi$  die zulässigen Folgen von Riemann-Summen zu  $\phi \circ f$  gegen  $\phi(\int_a^b f(t) dt)$  konvergieren. Um (d) zu beweisen, reicht es aus, die Integrierbarkeit über  $[a, b]$  zu zeigen, und hierfür benutzen wir dass  $f$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  sogar gleichmäßig stetig ist. Daher existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass  $\|f(t) - f(u)\| < \varepsilon$  gilt, falls nur  $|t - u| < \delta$  ist. Sei jetzt  $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$  irgendeine Zerlegung von  $[a, b]$ , deren Feinheit kleiner als  $\delta$  ist, und  $\tau_1, \dots, \tau_N$  seien irgendwelche Zwischenpunkte. Seien weiter eine beliebige Verfeinerung  $\mathcal{Z} = \{a = u_0 < u_1 < \dots < u_M = b\}$  von  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  und zugehörige Zwischenpunkte  $\eta_1, \dots, \eta_M$  gewählt. Für irgendein  $k$  seien  $t_{k-1} = u_{j-1} < u_j < \dots < u_m = t_k$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} & \left\| f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{\nu=j}^m f(\eta_\nu)(u_\nu - u_{\nu-1}) \right\| \\ &= \left\| \sum_{\nu=j}^m (f(\tau_k) - f(\eta_\nu))(u_\nu - u_{\nu-1}) \right\| \leq \sum_{\nu=j}^m \|f(\tau_k) - f(\eta_\nu)\| |u_\nu - u_{\nu-1}| < \varepsilon(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich hieraus

$$\|S(\mathcal{Z}_\varepsilon, \tau) - S(\mathcal{Z}, \eta)\| = \left\| \sum_{k=1}^N f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{\nu=1}^M f(\eta_\nu)(u_\nu - u_{\nu-1}) \right\| < \varepsilon(b - a).$$

Daraus folgt: Wenn wir eine zulässige Folge von Zerlegungen wählen, dann bilden die entsprechenden Riemannsummen für irgendeine Zwischenpunktwahl immer eine Cauchyfolge in  $\mathbb{X}$ , denn wenn die Feinheiten von Zerlegungen  $\mathcal{Z}_n$  und  $\mathcal{Z}_m$  beide kleiner als  $\delta$  sind, können wir  $\mathcal{Z}$  gleich der gemeinsamen Verfeinerung der beiden setzen und erhalten aus der obigen Abschätzung

$$\|S(\mathcal{Z}_n, \tau_n) - S(\mathcal{Z}_m, \tau_m)\| \leq \|S(\mathcal{Z}_n, \tau_n) - S(\mathcal{Z}, \tau)\| + \|S(\mathcal{Z}, \tau) - S(\mathcal{Z}_m, \tau_m)\| < 2\varepsilon(b - a).$$

Da  $\mathbb{X}$  vollständig ist, hat diese Folge einen Grenzwert, und daher ist  $f$  integrierbar. Dass die angegebene Funktion  $F$  Stammfunktion zu  $f$  ist, zeigt man wie in der Grundvorlesung. Zum Beweis der letzten Teilaussage sei  $\phi \in \mathbb{X}'$ . Dann ist  $\phi \circ F$  wegen Lemma 1.1.2 Stammfunktion zu  $\phi \circ f$ , und deshalb gilt mit (c)

$$\phi\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \phi(f(t)) dt = \phi(F(t))\Big|_a^b = \phi(F(b) - F(a)),$$

und daraus folgt mit (c) und dem Satz von Hahn-Banach die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 1.1.9 (Dreiecksungleichung für Integrale)** Zeige: Wenn  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, dann ist auch  $\|f\|$  auf  $[a, b]$  stetig und somit auch integrierbar, und es gilt die Ungleichung

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

**Aufgabe 1.1.10** Sei die Folge  $(f_n)$  von  $\mathbb{X}$ -wertigen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion  $f$ . Zeige: Sind alle  $f_n$  stetig auf  $[a, b]$ , so ist auch  $f$  dort stetig. Sind alle  $f_n$  über  $[a, b]$  integrierbar, so gilt dasselbe auch für  $f$ , und es folgt

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

**Aufgabe 1.1.11** Sei  $\mathbb{Y}$  ein zweiter Banachraum über demselben Körper  $\mathbb{K}$ , und sei  $T$  eine stetige lineare Abbildung von  $\mathbb{X}$  nach  $\mathbb{Y}$ . Zeige: Wenn eine  $\mathbb{X}$ -wertige Funktion  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar ist, dann ist auch die  $\mathbb{Y}$ -wertige Funktion  $T \circ f$  über  $[a, b]$  integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b T(f(t)) dt = T\left(\int_a^b f(t) dt\right).$$

Vergleiche dies mit der Aussage (c) des letzten Satzes.

## 1.2 Der Satz von Picard-Lindelöf im Banachraum

Die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen (erster Ordnung) befasst sich im Grunde mit differenzierbaren Funktionen mit Werten in einem endlich-dimensionalen Vektorraum, nämlich  $\mathbb{K}^n$ . Schon daher ist es sinnvoll zu fragen, ob eine ähnliche Theorie entwickelt werden kann, wenn  $\mathbb{K}^n$  durch einen beliebigen Banachraum ersetzt wird. Ein anderer wichtiger Grund liegt aber darin, dass man sehr oft ein System von Differentialgleichungen untersucht, dessen rechte Seite von zusätzlichen Variablen (besser Parameter genannt) abhängt, und dann stellt sich die Frage der Abhängigkeit der Lösungen von eben diesen Parametern. Genauer heißt das z. B.: Wenn die rechte Seite in diesen Parametern stetig oder sogar holomorph ist, gilt dies auch für die Lösungen? Eine solche rein qualitative Frage lässt sich leicht beantworten, wenn man Differentialgleichungen für Banachraum-wertige Funktionen untersucht, und wir wollen dies hier tun. Eine andere, noch wichtigere Frage besteht allerdings darin zu klären, wie sensitiv die Lösungen gegenüber (kleinen) Veränderungen der Parameterwerte und/oder der Anfangswerte sind. Dies soll später noch betrachtet werden.

Im Weiteren sei  $F$  eine  $\mathbb{X}$ -wertige Funktion auf der Menge  $D := [t_0, t_0 + r] \times \overline{K(x_0, s)}$ , mit  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{X}$ , und  $r, s > 0$ . Wir wollen jetzt folgendes Anfangswertproblem (AWP) studieren:

$$x' = F(t, x) \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2.1)$$

Wir nennen eine auf einem Teilintervall  $I := [t_0, t_0 + \rho]$ ,  $0 < \rho \leq r$  differenzierbare Funktion  $x$  *Lösung* des AWP, wenn  $x(t_0) = x_0$  ist, und wenn für alle  $t \in I$  immer  $x'(t) = F(t, x(t))$  ist, wobei implizit vorausgesetzt ist, dass alle Werte  $x(t)$  in der Kugel  $\overline{K(x_0, s)}$  liegen, damit  $x(t)$  überhaupt in  $F(t, x)$  eingesetzt werden kann – deshalb sollen stetige Funktionen mit Werten in  $\overline{K(x_0, s)}$  kurz *zulässig* heißen. Um den üblichen Satz von Picard-Lindelöf auf den Fall eines unendlich-dimensionalen Raumes  $\mathbb{X}$  ausdehnen zu können, ist vor allem zu beachten, dass in diesem Fall der Definitionsbereich  $D$  zwar abgeschlossen, aber i. A. nicht kompakt ist. Daher formulieren wir die erforderlichen Voraussetzungen jetzt wie folgt:

(V1) Für jede zulässige Funktion  $x(t)$ , also für jedes Teilintervall  $I := [t_0, t_0 + \rho]$ ,  $0 < \rho \leq r$  und jede dort stetige Funktion mit Werten in  $\overline{K(x_0, s)}$ , sei die Funktion  $F(t, x(t))$  wieder stetig auf  $I$ . Insbesondere ist dann  $F(t, x_0)$  auf  $[t_0, t_0 + r]$  stetig und folglich beschränkt, und wir setzen

$$K := \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + r} \|F(t, x_0)\|. \quad (1.2.2)$$

(V2) Es gebe ein  $L \in \mathbb{R}_+$  so, dass für alle  $t \in [t_0, t_0 + r]$  und  $x_1, x_2 \in \overline{K(x_0, s)}$  die *Lipschitzbedingung in der Variablen  $x$* , nämlich die Ungleichung

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

erfüllt ist.

Unter diesen Voraussetzungen bestimmen wir das maximale  $\rho \leq r$  so, dass

$$K \frac{e^{L\rho} - 1}{L} \leq s. \quad (1.2.3)$$

Diese Zahl  $\rho$  existiert und ist eindeutig bestimmt, da die linke Seite der Ungleichung gegen 0 geht für  $\rho \rightarrow 0$  und außerdem monoton wachsend in  $\rho$  ist – man kann  $\rho$  sogar ausrechnen, aber dies spielt hier keine Rolle.

**Aufgabe 1.2.1 (Grönwall'sche Ungleichung)** Sei  $I = [t_0, a) \subset \mathbb{R}$  mit  $a > t_0$ , und seien  $u, \alpha, \beta$  auf  $I$  stetige und nicht negative  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen mit

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) ds \quad \forall t \in I. \quad (1.2.4)$$

Zeige dass dann folgende Abschätzung für  $u$  gilt:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s) \beta(s) \exp \left[ \int_s^t \beta(\xi) d\xi \right] ds \quad \forall t \in I. \quad (1.2.5)$$

**Anleitung:** Definiere  $v(t) := \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) ds$ , zeige eine Ungleichung für

$$\frac{d}{dt} v(t) \exp \left[ - \int_{t_0}^t \beta(\xi) d\xi \right] = \beta(t) \exp \left[ - \int_{t_0}^t \beta(\xi) d\xi \right] (u(t) - v(t)),$$

und integriere diese.

**Satz 1.2.2 (Satz von Picard und Lindelöf)** Wenn  $F$  die obigen Voraussetzungen erfüllt, existiert genau eine Lösung des AWP (1.2.1) auf dem Intervall  $I = [t_0, t_0 + \rho]$ . Diese Lösung ist der Grenzwert der Folge  $(x_n)_{n=0}^\infty$ , definiert durch  $x_0(t) \equiv x_0$  und

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.2.6)$$

wobei diese Folge auf dem angegebenen Intervall gleichmäßig konvergiert.

**Beweis:** Der Beweis läuft im Grunde völlig analog zu dem im Fall  $\mathbb{X} = \mathbb{K}^n$ : Sei für den Moment angenommen, dass die Folge  $x_n(t)$  auf  $I$  durch (1.2.6) definiert ist (beachte, dass dies nicht selbstverständlich ist, da ja die Funktionen zulässig sein müssen). Aus der Fundamentalabschätzung des Integrals und der Definition der Zahl  $K$  folgt sofort

$$\|x_1(t) - x_0\| \leq (t - t_0) K \quad \forall t \in I.$$

Mit Hilfe der Lipschitzbedingung und Aufgabe 1.1.9 folgt weiter

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)\| d\tau \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in I. \quad (1.2.7)$$

Hieraus schließen wir mit vollständiger Induktion

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq K \frac{(t - t_0)^{n+1} L^n}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, t \in I.$$

Daraus wiederum folgt mit der Dreiecksungleichung für  $m, p \in \mathbb{N}$ :

$$\|x_{m+p}(t) - x_m(t)\| \leq \sum_{n=m}^{m+p-1} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq K \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(t - t_0)^{n+1} L^n}{(n+1)!} \quad \forall t \in I. \quad (1.2.8)$$

Wenn man jetzt  $m = 0$  setzt, so erhält man dass  $\|x_p(t) - x_0\| \leq K (e^{L\rho} - 1)/L \leq s$ , und dies zeigt, dass die Iteration wohldefiniert ist (beachte auch, dass nach Voraussetzung (V1) die Iterierten alle stetig auf  $I$  sind). Weiter folgt aber aus (1.2.8) für allgemeines  $m$  die gleichmäßige Konvergenz der Folge auf dem Intervall  $I$ , und die Grenzfunktion ist nach Aufgabe 1.1.10 stetig. Außerdem kann man bei gleichmäßiger Konvergenz das Integral und den Grenzwert vertauschen, und daher gilt die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x(\tau)) d\tau \quad \forall t \in I.$$

Hieraus folgt aber die Differenzierbarkeit von  $x$  sowie die Tatsache, dass  $x$  das AWP löst. Um noch die Eindeutigkeit zu zeigen, sei  $\tilde{x}$  eine weitere Lösung. Dann erfüllt auch  $\tilde{x}$  die obige Integralgleichung, und für die Differenz  $d = x - \tilde{x}$  folgt mit Hilfe der Lipschitzbedingung die Ungleichung

$$\|d(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|d(\tau)\| d\tau \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in I.$$

Aus Aufgabe 1.2.1 folgt dann aber  $d(t) \equiv 0$ , also die Eindeutigkeit.  $\square$

**Aufgabe 1.2.3** Zeige dass ein analoger Satz auch auf einem Intervall der Form  $[t_0 - r, t_0]$  gilt, falls  $F$  die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt.

**Aufgabe 1.2.4** Sei angenommen, dass die Funktion  $F$  sogar auf  $[t_0, t_0 + r] \times \mathbb{X}$  definiert ist und dort (global) eine Lipschitzbedingung erfüllt. Zeige, dass dann die Lösung des AWP immer auf dem vollen Intervall  $[t_0, t_0 + r]$  existiert. Wende dies auf den Fall einer linearen Funktion  $F(t, x) = A(t)x + b(t)$  an, wobei  $A : [t_0, t_0 + r] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$  und  $b : [t_0, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{X}$  stetig sind.

**Aufgabe 1.2.5** Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ , und sei  $x_0 \in \mathbb{X}$ . Zeige mit Hilfe von Aufgabe 1.1.4:

- (a) Das AWP  $x' = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  hat die eindeutig bestimmte Lösung  $x(t) = e^{tA} x_0$ .
- (b) Ist  $b$  eine beliebige  $\mathbb{X}$ -wertige stetige Funktion auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + r]$ , so ist die nach Satz 1.2.2 eindeutig bestimmte Lösung des AWP  $x' = Ax + b(t)$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + r$  gegeben durch

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-\tau A} b(\tau) d\tau \right).$$

### 1.3 Anwendungen

Wir wollen Satz 1.2.2 jetzt in der folgenden Situation anwenden: Gegeben seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{K}^m$ , sowie  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{K}^n$  und  $r, s > 0$ . Weiter sei  $f$  eine auf  $[t_0, t_0 + r] \times \overline{K(x_0, s)} \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$  stetige  $\mathbb{K}^n$ -wertige Funktion, und  $g_0$  sei auf  $K$  stetig mit Werten in  $\overline{K(x_0, s/2)}$ . Gesucht ist eine Lösung  $x = x(t, y)$  des  $n$ -dimensionalen AWP mit den Parametern  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$

$$x' = f(t, x, y), \quad x(t_0, y) = g_0(y) \quad \forall y \in K, \quad (1.3.1)$$

wobei mit  $x' = x'(t, y)$  immer die (partielle) Ableitung nach  $t$  gemeint ist. Wenn wir beachten, dass  $f$ , als stetige Funktion von  $n + m + 1$  Variablen auf einem kompakten Definitionsbereich, auch beschränkt ist, müssen wir für eine Anwendung des "normalen" Satz von Picard-Lindelöf (bei beliebigem aber festem  $y \in K$ ) noch voraussetzen, dass eine Lipschitzbedingung der Form

$$\|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r], x_1, x_2 \in \overline{K(x_0, s)}, y \in K \quad (1.3.2)$$

gilt. Dabei kann die Lipschitzkonstante  $L$  von  $y$  abhängen, aber wir wollen für die folgenden Überlegungen annehmen, dass dies nicht so ist. Dies ist z. B. erfüllt, wenn die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x_1, \dots, x_n$  in  $[t_0, t_0 + r] \times \overline{K(x_0, s)} \times K$  existieren und beschränkt sind. Unter diesen Voraussetzungen erhält man Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.3.1), weiß aber zunächst nichts darüber, wie die Lösung von  $y$  abhängt. Für Information darüber kann man z. B. Satz 1.2.2 anwenden, wenn man einen geeigneten Banachraum wählt. Dazu betrachten wir folgende Fälle:

1. Die Menge  $C(K)$  aller auf  $K$  stetigen Funktionen mit Werten in  $\mathbb{K}^n$  ist ein Banachraum bezüglich der Norm

$$\|g\|_\infty := \sup_{y \in K} \|g(y)\|,$$

wobei rechts die euklidische Norm in  $\mathbb{K}^n$  steht. Mit  $\overline{K(g_0, \sigma)}_\infty = \{g \in C(K) : \|g - g_0\|_\infty \leq \sigma\}$  definieren wir eine  $C(K)$ -wertige Funktion  $F(t, g)$ , definiert auf  $[t_0, t_0 + r] \times \overline{K(g_0, \sigma)}_\infty$  durch

$$F(t, g)(y) = f(t, g(y), y) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r], g \in \overline{K(g_0, \sigma)}_\infty, y \in K.$$

Für  $\sigma = s/2$  und  $g \in \overline{K(x_0, \sigma)}_\infty$  folgt mit der Dreiecksungleichung dass die Werte  $g(y)$  alle im Definitionsbereich von  $f$  liegen. Weiter ist durch die Stetigkeit von  $f$  gesichert, dass  $F(t, g)$  in der

Es sei eine stetige Funktion auf  $K$  ist. Da  $f$  auf dem angegebenen (kompakten) Definitionsbereich sogar gleichmäßig stetig ist, finden wir dass für jede zulässige Funktion  $x(t) = x(t, y)$

$$\|F(t_1, x(t_1))(y) - F(t_2, x(t_2))(y)\| = \|f(t_1, x(t_1, y), y) - f(t_2, x(t_2, y), y)\| < \varepsilon$$

ausfällt, sobald  $|t_1 - t_2| < \delta$  ist. Bildet man das Supremum über  $y \in K$ , so folgt hieraus die Stetigkeit der Abbildung  $t \mapsto F(t, x(t))$  von  $[a, b]$  nach  $C(K)$ . Auch die beiden anderen Voraussetzungen von Satz 1.2.2 sind erfüllt, und daher folgt aus diesem Satz, dass die Lösungen eines AWP bei stetiger Änderung der Parameter und/oder der Anfangswerte sich ebenfalls stetig ändern!

2. Mit den obigen Bezeichnungen betrachten wir jetzt für  $n = m = 1$  und  $K = [a, b]$  die Menge  $C_1(K)$  aller auf  $K$  einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in  $\mathbb{K}$ . Dies ist ein Banachraum, z. B. bezüglich der Norm

$$\|g\|_{1,\infty} := |g(a)| + \sup_{a \leq y \leq b} |g'(y)|.$$

Wir definieren  $F$  wie oben, und wollen erreichen, dass für alle  $g \in C_1(K)$  die Funktion  $F(t, g)(y) = f(t, g(y), y)$  nach  $y$  stetig differenzierbar ist. Daher setzen wir voraus, dass  $f(t, x, y)$  nach den Variablen  $x$  und  $y$  stetig partiell differenzierbar ist und erhalten dann

$$\frac{\partial}{\partial y} F(t, g)(y) = f_y(t, g(y), y) + f_x(t, g(y), y) g'(y),$$

wobei an den Rändern des rechteckigen Definitionsbereiches die entsprechenden einseitigen partiellen Ableitungen gemeint sind. Ähnlich wie oben kann man die entsprechenden Voraussetzungen von Satz 1.2.2 verifizieren und erhält dann durch Anwendung dieses Satzes, dass die Lösungen von (1.3.1) differenzierbare Funktionen von  $y$  sind, wenn nur die rechte Seite und/oder die Anfangswerte eben solche Funktionen sind.

3. Sei jetzt erneut  $m = 1$ , aber  $n$  beliebig, sei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , und sei  $K = \overline{G}$  die abgeschlossene Hülle eines beschränkten Gebietes  $G \subset \mathbb{C}$ . In dieser Situation ist die Menge aller in  $G$  holomorph<sup>2</sup> und auf  $K$  stetigen Funktionen mit Werten in  $\mathbb{C}^n$  ein abgeschlossener Unterraum von  $C(K)$ . Wenn die rechte Seite von (1.3.1) und die Anfangswerte holomorph in der (einen) Variablen  $y$  sind, dann folgt also aus Satz 1.2.2 und dem ersten Teil dieser Diskussion die Holomorphie der Lösungen. Beachte aber, dass hier Holomorphie in dem Parameter  $y$ , nicht aber in der Variablen  $t$  gemeint ist!

**Aufgabe 1.3.1** *Finde selber geeignete Banachräume  $\mathbb{X}$ , um Resultate von folgender Art zu beweisen:*

- *Wenn die rechte Seite und die Anfangswerte nach mehreren Parametern stetig partiell differenzierbar ist, dann gilt dasselbe für die Lösungen.*
- *Wenn die rechte Seite und die Anfangswerte nach einem Parameter  $n$ -mal stetig differenzierbar ist, dann gilt dasselbe für die Lösungen.*

*Überlege, wie man auch Resultate hinsichtlich beliebig oftmaliger (partieller) Differenzierbarkeit ableiten kann.*

## 1.4 Differentialgleichungen in einer komplexen Variablen

Bisher haben wir Differentialgleichungen in der Variablen  $t$  betrachtet, welche in den Anwendungen meist die Bedeutung von Zeit hat und innerhalb eines reellen Intervalls variiert. In vielen Fällen stellt man aber fest, dass die Lösungen einer solche Dgl eigentlich holomorphe Funktionen sind, d. h. also in Wahrheit auf einem Gebiet in der komplexen Ebene definiert und dort differenzierbar sind. Wir wollen jetzt feststellen,

<sup>2</sup>Eine solche Funktion soll holomorph heißen, wenn alle Koordinatenfunktionen holomorph sind.

in welchen Fällen dies so ist, und betrachten hierzu an Stelle eines reellen Intervalls ein bezüglich eines Wertes  $z_0$  sternförmiges Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ , und wollen dann an Stelle von  $t$  den Buchstaben  $z$  zur Bezeichnung der unabhängigen Variablen verwenden. Mit  $\mathbb{X}$  bezeichnen wir wieder einen Banachraum, allerdings jetzt immer über  $\mathbb{C}$ . Typischerweise kann man hier  $\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$  setzen, aber die gleichen Resultate gelten auch in einem unendlich-dimensionalen Raum.

**Definition 1.4.1** Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{X}$  heißt stark holomorph, oder auch einfach holomorph, in  $G$ , wenn für jedes  $z_0 \in G$  der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-1} (f(z) - f(z_0))$$

existiert, und in diesem Fall heißt  $f'(z_0)$  die (erste) Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z_0$ . Wir nennen  $f$  schwach holomorph in  $G$ , falls für jedes  $\phi \in \mathbb{X}^*$  die Hintereinanderausführung  $\phi \circ f : G \rightarrow \mathbb{C}$  im üblichen Sinn der Funktionentheorie holomorph in  $G$  ist.

**Bemerkung 1.4.2** Ein wichtiges Resultat, das wir hier ohne Beweis benutzen wollen, besagt: Jede in  $G$  schwach holomorphe Funktion ist dort holomorph. Die Umkehrung gilt natürlich auch. In dem für uns wichtigsten Fall  $\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$  ist diese Äquivalenz klar.

Für den Rest dieses Abschnittes sei  $F$  eine  $\mathbb{X}$ -wertige Funktion auf der offenen Menge  $D := U_r(z_0) \times K(x_0, s)$ , mit  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $x_0 \in \mathbb{X}$ , und  $r, s > 0$ . Wir wollen jetzt folgendes Anfangswertproblem (AWP) in der komplexen Variablen  $z$  untersuchen:

$$x' = F(z, x) \quad x(z_0) = x_0. \tag{1.4.1}$$

Wir nennen eine auf einer Kreisscheibe  $U_\rho(z_0)$ ,  $0 < \rho \leq r$ , holomorphe Funktion  $x$  Lösung des AWP, wenn  $x(z_0) = x_0$  ist, und wenn für alle  $z \in U_\rho(z_0)$  immer  $x'(z) = F(z, x(z))$  ist, wobei wieder implizit vorausgesetzt ist, dass alle Werte  $x(z)$  in der Kugel  $K(x_0, s)$  liegen, damit  $x(z)$  überhaupt in  $F(z, x)$  eingesetzt werden kann – holomorphe Funktionen mit dieser Eigenschaft sollen erneut kurz *zulässig* heißen. Um Satz 1.2.2 auf diesen Fall ausdehnen zu können, machen wir folgende zusätzliche Voraussetzungen:

(V1) Für jede zulässige Funktion  $x(z)$  sei die Funktion  $F(z, x(z))$  wieder holomorph in  $U_r(z_0)$ . Insbesondere ist also dann  $F(z, x_0)$  holomorph in  $U_r(z_0)$ , und wir verlangen zusätzlich deren Beschränktheit, so dass dann ein  $K > 0$  existiert mit

$$K := \sup_{|z - z_0| < r} \|F(z, x_0)\|. \tag{1.4.2}$$

(V2) Es gebe ein  $L \in \mathbb{R}_+$  so, dass für alle  $z \in U_r(z_0)$  und  $x_1, x_2 \in K(x_0, s)$  die *Lipschitzbedingung in der Variablen  $x$* , d. i. die Ungleichung

$$\|F(z, x_1) - F(z, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

erfüllt ist.

In der Funktionentheorie benutzt man statt des üblichen Riemann-Integrals ein Kurvenintegral. Auch dieses kann man für Banachraum-wertige Funktionen erklären. Da wir aber hier nur in einem sternförmigen Gebiet integrieren wollen, verzichten wir auf die Einführung allgemeiner Kurvenintegrale und führen statt dessen das Integral über ein Geradenstück durch Einsatz der Parameterdarstellung auf ein normales Riemann-Integral zurück.

Unter den oben angegebenen Voraussetzungen können wir jetzt zeigen:

**Satz 1.4.3 (Satz von Picard und Lindelöf im Komplexen)** Wenn  $f$  die obigen Voraussetzungen erfüllt, existiert genau eine Lösung von (1.2.1) auf der Kreisscheibe  $U := U_\rho(z_0)$ , mit  $\rho$  wie in (1.2.3). Diese Lösung ist der Grenzwert der Folge  $(x_n)_{n=0}^\infty$ , definiert durch  $x_0(z) \equiv x_0$  und

$$x_{n+1}(z) = x_0 + \int_{z_0}^z F(w, x_n(w)) dw := x_0 + (z - z_0) \int_0^1 F(w(t), x_n(w(t))) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.4.3)$$

mit  $w(t) = (1 - t)z_0 + tz$ , wobei diese Folge auf der angegebenen Kreisscheibe gleichmäßig konvergiert.

**Beweis:** Der Beweis verläuft weitgehend analog wie der von Satz 1.2.2: Durch dieselben Abschätzungen erhält man, dass die Folge der  $x_n$  definiert ist und auf  $U$  gleichmäßig konvergiert. Um zu sehen, dass alle  $x_n$  dort holomorph sind, benutzt man am einfachsten, dass für jedes  $\phi \in \mathbb{X}'$  aus (1.4.3) mit Hilfe von Satz 1.1.8 (c) folgt

$$\phi(x_{n+1})(z) = \phi(x_0) + \int_{z_0}^z \phi(F(w, x_n(w))) dw \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

und daraus folgt per Induktion jedenfalls die schwache Holomorphie der Funktionen in  $U$ , was aber zur Holomorphie äquivalent ist. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt dann die (schwache) Holomorphie der Grenzfunktion  $x$ , und durch Vertauschen von Integral und Grenzwertbildung erhalten wir die Integralgleichung

$$x(z) = x_0 + \int_{z_0}^z F(w, x(w)) dw \quad \forall z \in U.$$

Hieraus folgt aber, dass  $x$  das AWP löst. Auch die Eindeutigkeit folgt völlig analog wie im Beweis von Satz 1.2.2.  $\square$

**Bemerkung 1.4.4** Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem  $x' = A(z)x + b(z)$ , für welches  $A(z)$  eine quadratische  $n$ -reihige Matrix und  $b(z)$  ein entsprechender Vektor sind, deren Einträge alle in einer Kreisscheibe  $U = U_r(z_0)$  holomorph sind. Dann kann der letzte Satz, mit beliebig großem  $s$ , angewandt werden und zeigt, dass die Lösungen des Systems ebenfalls in  $U$  holomorph sind. In gewissem Sinn kann man die Lösungen dann durch einen Potenzreihenansatz berechnen: Dazu entwickeln wir

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k A_k, \quad b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k b_k,$$

mit  $n$ -reihigen quadratischen Matrizen  $A_k$  und Vektoren  $b_k \in \mathbb{C}^n$ . Der Ansatz  $x(z) = \sum (z - z_0)^k x_k$ , mit noch unbestimmten Koeffizienten  $x_k \in \mathbb{C}^n$ , führt durch gliedweises Ableiten und Koeffizientenvergleich zu den Gleichungen

$$(k + 1)x_{k+1} = b_k + \sum_{j=0}^k A_{k-j} x_j \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Aus diesen Gleichungen sieht man: Wenn  $x_0 = x(z_0)$  gegeben ist, können alle übrigen Koeffizienten rekursiv berechnet werden. Der Satz 1.4.3 ergibt ohne weitere Rechnung dass die so gewonnene Potenzreihe für die Lösung des AWP mindestens in  $U$  konvergiert. Ein solcher Potenzreihenansatz ist grundsätzlich auch für nichtlineare Systeme möglich, führt aber auf wesentlich kompliziertere Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten  $x_k$ .

# Kapitel 2

## Stabilität

In diesem Kapitel wollen wir die (Ljapunov-)Stabilität kennen lernen. Dieser Begriff drückt aus, dass sogenannte *globale* Lösungen, welche am Anfang dicht beieinanderliegen, dies auch für alle späteren Zeiten tun. Da man in praktischen Anwendungen die Anfangsdaten so gut wie nie genau bestimmen kann, ist es von großer theoretischer Bedeutung zu wissen, dass ein System stabil ist, da im anderen Fall eine geringe *Störung* der Anfangsdaten langfristig katastrophale Auswirkungen haben kann. Andererseits ist es oft nicht einfach festzustellen, ob ein gegebenes System stabil ist – z. B. ist bis heute nicht bekannt, ob das relativ leicht aufzustellende Differentialgleichungssystem, welches unser Sonnensystem beschreibt, stabil ist oder nicht!

### 2.1 Lipschitz-stetige Differentialgleichungssysteme

In diesem Abschnitt betrachten wir immer ein festes System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$x' = f(t, x), \quad (t, x) \in G. \quad (2.1.1)$$

Dabei sei für die Funktion  $f$  und ihren Definitionsbereich  $G$  immer folgendes vorausgesetzt:

- (A1) Der Definitionsbereich  $G$  ist ein Gebiet in  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ , also offen und zusammenhängend.
- (A2) Die Funktion  $f(t, x)$  ist stetig auf  $G$  und hat Werte in  $\mathbb{K}^n$ .
- (A3) Die Funktion  $f(t, x)$  erfüllt auf  $G$  *lokal eine Lipschitzbedingung* bzgl.  $x$  – d. h., für alle  $(t_0, x_0) \in G$  gibt es offene Mengen  $U_1 \subset \mathbb{R}$  und  $U_2 \subset \mathbb{K}^n$  mit  $(t_0, x_0) \in U_1 \times U_2 \subset G$  sowie eine Lipschitzkonstante  $L$ , so dass

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall t \in U_1, \quad x_1, x_2 \in U_2.$$

Funktionen mit dieser Eigenschaft nennt man auch kurz *Lipschitz-stetig in  $x$* .

**Aufgabe 2.1.1** Sei  $f$  wie oben beschrieben. Zeige: Ist  $K \subset G$  kompakt, so gibt es immer ein  $L > 0$  so, dass die Lipschitzbedingung mit diesem  $L$  für alle  $(t, x_1), (t, x_2) \in K$  gilt.

**Aufgabe 2.1.2** Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $G$ , und seien  $(t_0, x_0), (t_1, x_1) \in K$  so, dass die Lösungen  $x_0(t)$  und  $x_1(t)$  von (2.1.1) mit  $x_0(t_0) = x_0$  und  $x_1(t_1) = x_1$  auf einem kompakten Intervall  $I$  mit  $t_0, t_1 \in I$  definiert sind. Zeige, dass es eine Konstante  $C$  gibt, welche nur von  $K$ , nicht aber von  $(t_0, x_0), (t_1, x_1)$  abhängt, so dass gilt

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq C (|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|) \quad \forall t \in I.$$



Zeige hiermit folgende Eindeutigkeitsaussage für Lösungen von (2.1.1): Ist  $I$  ein beliebiges Intervall, und sind  $x(t)$  und  $\tilde{x}(t)$  zwei auf  $I$  definierte Lösungen mit  $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$  für ein  $t_0 \in I$ , dann folgt  $x(t) \equiv \tilde{x}(t)$ .

**Bemerkung 2.1.3** Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt immer folgendes:

- (a) Ist  $x(t)$  für  $t \in I$  eine Lösung von (2.1.1), so ist insbesondere der Graph  $\{(t, x(t)) : t \in I\}$  eine Teilmenge von  $G$ , welche kompakt ist, falls  $I$  ein kompaktes Intervall ist.
- (b) Zu jedem Paar  $(t_0, x_0) \in G$  gibt es nach Satz 1.2.2 genau eine Lösung  $x(t)$  von (2.1.1) auf einem Intervall der Form  $[t_0, t_0 + \rho]$  mit  $x(t_0) = x_0$ . Da diese Lösung sicherlich von der Wahl der Anfangsdaten  $(t_0, x_0)$  abhängt, soll sie im Folgenden mit  $x(t, t_0, x_0)$  bezeichnet werden. Beachte aber, dass mit  $x'(t, t_0, x_0)$  immer die (partielle) Ableitung dieser Funktion nach  $t$  gemeint ist.
- (c) Durch Substitution  $t \rightarrow -t$  sieht man, dass es auch auf einem linksseitigen Intervall  $[t_0 - \rho, t_0]$  eine eindeutige Lösung des gleichen AWP gibt. Dies bedeutet, dass die Funktion  $x(t, t_0, x_0)$  immer auf einem  $t$ -Intervall existiert, welches  $t_0$  als inneren Punkt enthält.
- (d) Zur Angabe einer Lösung eines Anfangswertproblems gehört eigentlich auch immer die Angabe eines Intervalls, auf dem diese Lösung definiert ist. Wenn wir aber zwei verschiedene Intervalle  $I_1$  und  $I_2$  betrachten, auf denen  $x(t, t_0, x_0)$  definiert ist, folgt aus Aufgabe 2.1.2 die Eindeutigkeit der Lösung auf  $I_1 \cap I_2$ . Also können wir die Lösung immer auf die Vereinigung  $I_1 \cup I_2$  fortsetzen. Daher ist klar, dass es ein *maximales* Intervall (nämlich die Vereinigung aller dieser Intervalle) gibt, auf welches die Lösung fortsetzbar ist. Durch eine erneute Anwendung von Satz 1.2.2 folgt weiter, dass dieses maximale Intervall offen ist. Es gibt also zwei Funktionen  $t^\pm(t_0, x_0)$ , welche auf  $G$  definiert sind und auch die Werte  $\pm\infty$  annehmen können, derart dass das maximale Existenzintervall der Lösung  $x = x(t, t_0, x_0)$  die Form  $(t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0))$  hat. Somit ist der Definitionsbereich der Funktion  $x(t, t_0, x_0)$  die Menge

$$D := \{ (t, t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in G, t^-(t_0, x_0) < t < t^+(t_0, x_0) \} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n.$$

(e) Wir zeigen jetzt:

- Die Menge  $D$  ist offen, und die Funktion  $x$  ist dort Lipschitz-stetig. Das heißt genauer: Zu jedem  $(t^{(1)}, t_0^{(1)}, x_0^{(1)}) \in D$  gibt es offene Intervalle  $I, J \in \mathbb{R}$  und eine offene Menge  $O \subset \mathbb{K}^n$  so, dass  $(t^{(1)}, t_0^{(1)}, x_0^{(1)}) \in I \times J \times O \subset D$  ist, und dass für ein  $L > 0$  (abhängig von  $I, J, O$ ) die Ungleichung

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0)\| \leq L (|t - \tilde{t}| + |t_0 - \tilde{t}_0| + \|x_0 - \tilde{x}_0\|)$$

für alle  $t, \tilde{t} \in I$ ,  $t_0, \tilde{t}_0 \in J$  und  $x_0, \tilde{x}_0 \in O$  erfüllt ist.

**Beweis:** Sei ein beliebiger Punkt  $(t^{(1)}, t_0^{(1)}, x_0^{(1)}) \in D$  gegeben. Wir beschränken unsere Diskussion auf den Fall dass  $t^{(1)} \geq t_0^{(1)}$  ist – der andere Fall lässt sich aber analog behandeln. Der Graph der Funktion  $x(t, t_0^{(1)}, x_0^{(1)})$ , für  $t_0^{(1)} \leq t \leq t^{(1)}$ , ist eine kompakte Teilmenge  $K_1$  von  $G$ , und daher gibt es eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{K}^n$  mit

$$K_1 \subset \overset{\circ}{K} \subset G.$$

Auf  $K$  erfüllt  $f$  wegen Aufgabe 2.1.1 eine (globale) Lipschitzbedingung mit einer einheitlichen Lipschitzkonstanten  $L$  und ist dort auch beschränkt durch eine Zahl  $M$ . Die abgeschlossene Hülle des Komplements von  $K$  hat von der kompakten Menge  $K_1$  einen positiven Abstand, und daher folgt die Existenz von Zahlen  $r, \sigma > 0$  so, dass

$$[t - r, t + r] \times \overline{K(x, \sigma)} \subset K \quad \forall (t, x) \in K_1.$$

Seien jetzt  $(t_0, x_0)$  mit  $|t_0 - t_0^{(1)}| < r$  und  $\|x_0 - x_0^{(1)}\| < s$  gegeben – dabei sei  $s = \sigma/m$  mit einer natürlichen Zahl  $m \geq 2$ , welche noch gewählt werden soll. Dann können wir Satz 1.2.2 auf diese

Anfangsdaten anwenden und sehen dass die Funktion  $x(t, t_0, x_0)$  mindestens auf dem  $t$ -Intervall  $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$  definiert ist, wobei  $\rho$  nur von den Zahlen  $L$  und  $M$ , nicht aber von den Anfangsdaten abhängt. Also sehen wir

$$[t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times [t_0^{(1)} - r, t_0^{(1)} + r] \times \overline{K(x_0^{(1)}, s)} \subset D.$$

Falls  $t^{(1)} < t_0 + \rho$  ist, folgt hieraus dass  $(t^{(1)}, t_0^{(1)}, x_0^{(1)})$  ein innerer Punkt von  $D$  ist. Im anderen Fall folgt dass  $x(t, t_0, x_0)$  durch erneute Anwendung von Satz 1.2.2 mit den Anfangsdaten  $(t_1, x_1)$ ,  $t_1 := t_0 + \rho$ ,  $x_1 := x(t_0 + \rho, t_0, x_0)$ , auf das Intervall  $[t_0 + \rho, t_0 + 2\rho]$  fortgesetzt werden kann – jedenfalls wenn wir  $m \geq 3$  wählen, da dann die Kugel  $\overline{K(x_1, s)}$  noch ganz in  $\overline{K(x_0^{(1)}, \sigma)}$  enthalten ist. Dieser Schluss kann endlich oft wiederholt werden, wobei  $m$  entsprechend vergrößert werden muss, und man erhält dann

$$[t_0 - \rho, t_0 + (m-1)\rho] \times [t_0^{(1)} - r, t_0^{(1)} + r] \times \overline{K(x_0^{(1)}, s)} \subset D.$$

Also ist schließlich  $t^{(1)} < t_0 + (m-1)\rho$ , und dann folgt dass  $(t^{(1)}, t_0^{(1)}, x_0^{(1)})$  in der Tat ein innerer Punkt von  $D$  ist. Somit ist  $D$  offen. Um die Lipschitz-Stetigkeit von  $x(t, t_0, x_0)$  zu zeigen, sei wieder  $(t^{(1)}, t_0^{(1)}, x_0^{(1)}) \in D$  gegeben. Wie oben betrachten wir nur den Fall  $t_0^{(1)} \leq t^{(1)}$ . Aus dem bereits Gezeigten folgt die Existenz einer kompakten Umgebung  $A$  von  $x_0^{(1)}$  sowie einer Zahl  $\varepsilon > 0$  so, dass für alle  $t_0 \in I_\varepsilon := [t_0^{(1)} - \varepsilon, t_0^{(1)} + \varepsilon]$  und  $x_0 \in A$  die Lösung zu den Anfangsdaten  $(t_0, x_0)$  auf dem Intervall  $J_\varepsilon := [t_0^{(1)} - \varepsilon, t^{(1)} + \varepsilon]$  definiert ist. Daher gilt für  $t \in J_\varepsilon$  und zwei Vektoren  $x_0, x_1 \in A$

$$x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_1) = x_0 - x_1 + \int_{t_0}^t (f(\tau, x(t, t_0, x_0)) - f(\tau, x(t, t_0, x_1))) d\tau.$$

Schätzt man mit Hilfe von Dreiecksungleichung und Lipschitzbedingung ab, so folgt hieraus mit einer Lipschitzkonstante, welche wegen der Kompaktheit von  $J_\varepsilon \times I_\varepsilon \times A$  von  $t, t_0$  und  $x_0, x_1$  nicht abhängt, die Ungleichung

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_1)\| \leq \|x_0 - x_1\| + L \int_{t_0}^t \|x(\tau, t_0, x_0) - x(\tau, t_0, x_1)\| d\tau.$$

Mit der Grönwall'schen Ungleichung folgt hieraus die Lipschitzstetigkeit in  $x_0$ . Wegen  $x'(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0))$  folgt mit dem Mittelwertsatz auch die Lipschitzstetigkeit in  $t$ . Seien jetzt  $t_0, t_1 \in I_\varepsilon$ . Dann ist  $x(t, t_0, x_0)$  auf dem Intervall  $J_\varepsilon$  Lösung von (2.1.1) sowohl zu den Anfangsdaten  $(t_0, x_0)$  als auch zu  $(t_1, x_1)$ , mit  $x_1 := x(t_1, t_0, x_0)$ , und  $x(t, t_1, x_0)$  ist die Lösung zu den Daten  $(t_1, x_0)$ . Also folgt aus dem bereits gezeigten die Existenz von Konstanten  $L_1, L_2$  mit

$$\|x(t, t_1, x_0) - x(t, t_0, x_0)\| = \|x(t, t_1, x_0) - x(t, t_1, x_1)\| \leq L_1 \|x_1 - x_0\|$$

sowie

$$\|x_1 - x_0\| = \|x(t_1, t_0, x_0) - x(t_0, t_0, x_0)\| \leq L_2 |t_1 - t_0|,$$

jeweils für alle  $t \in J_\varepsilon$  und  $x_0 \in A$ . Daher ist  $x$  auch Lipschitz-stetig in der Variablen  $t_0$ . Zusammengekommen folgt deshalb die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 2.1.4** Seien  $(t_1, t_0, x_0), (t_2, t_0, x_0) \in D$ . Zeige: Dann ist auch  $(t_2, t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \in D$ , und es gilt

$$x(t_2, t_0, x_0) = x(t_2, t_1, x(t_1, t_0, x_0)).$$

Analysiere dies für den einfachen Fall dass  $f(t, x)$  von  $t$  unabhängig und eine lineare Abbildung in  $x$  ist.

## 2.2 Definition und einfache Eigenschaften der Stabilität

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder ein System (2.1.1) unter den Voraussetzungen (A1)–(A3), machen allerdings folgende zusätzliche Annahmen für den Definitionsbereich und die Funktion  $f$ :

- (A4) Der Definitionsbereich  $G$  ist das kartesische Produkt eines offenen Intervalls  $I \subset \mathbb{R}$  und eines Gebietes  $G_1 \subset \mathbb{K}^n$ .
- (A5) Das Intervall  $I$  ist von der Form  $I = (a, \infty)$ , und  $a$  ist negativ.
- (A6) Es gilt  $0 \in G_1$ .
- (A7) Es gilt  $f(t, 0) = 0$  für alle  $t \in I$ .

**Bemerkung 2.2.1** Wir nennen Lösungen von (2.1.1) global, wenn sie auf einem bis  $\infty$  reichenden Teilintervall definiert sind. Die Voraussetzungen (A6), (A7) sichern die Existenz mindestens einer globalen Lösung, nämlich  $x(t) \equiv 0$ . Wenn es überhaupt eine globale Lösung  $x_0(t)$  auf einem Intervall  $(b, \infty)$  gibt, dann kann man  $x = x_0(t) + y$  setzen und findet, dass  $x$  genau dann (2.1.1) löst, wenn  $y$  eine Lösung des Systems  $y' = g(t, y)$  mit  $g(t, y) = f(t, x_0(t) + y) - f(t, x_0(t))$  ist. Dieses neue System erfüllt dann (A6). Also ist diese Voraussetzung in gewissem Sinn äquivalent zur Existenz einer globalen Lösung.

**Definition 2.2.2** Unter den oben getroffenen Annahmen nennen wir die Null-Lösung stabil, wenn es zu jedem  $t_0 \in I$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x_0 \in G_1$  mit  $\|x_0\| < \delta$  die Lösung  $x(t, t_0, x_0)$  global ist, und wenn  $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$  gilt für alle  $t \geq t_0$ . Wenn zusätzlich für alle diese  $x_0$  sogar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0 \quad (2.2.1)$$

ist, dann heißt die Null-Lösung asymptotisch stabil. Allgemeiner heißt eine globale Lösung  $x_0(t)$  auf einem Intervall  $(b, \infty)$  stabil bzw. asymptotisch stabil, wenn die in Bemerkung 2.2.1 angegebene Transformation auf ein neues System führt, für welches die Nulllösung stabil bzw. asymptotisch stabil ist.

Beachte, dass aus (2.2.1) alleine noch nicht die Stabilität folgt, da eine Lösung, die schließlich gegen 0 geht, vorher beliebig groß werden kann.

Wir wollen nun klarstellen, dass die Stabilität der Null-Lösung in gewissem Sinn nicht von der Wahl des Anfangszeitpunktes  $t_0$  abhängt:

- Sei die Bedingung der (asymptotischen) Stabilität für ein  $t_0 \in I$  erfüllt. Dann gilt dasselbe auch für jedes andere  $t_0$ .

Dies folgt leicht aus der Tatsache, dass  $x(t, t_0, x_0)$  auf dem ganzen Definitionsbereich  $D$  Lipschitz-stetig in  $t_0$  ist. Wegen dieser Tatsache (und weil nach Voraussetzung  $0 \in I$  ist) können wir uns im Folgenden auf den Fall  $t_0 = 0$  beschränken.

## 2.3 Gestörte lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wenn die Funktion  $f(t, x)$  mindestens zweimal stetig partiell nach den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  differenzierbar ist gilt nach dem Taylorsche Satz (wegen Voraussetzung (A7))

$$f(t, x) = A(t)x + g(t, x),$$

wobei  $A(t)$  eine  $n$ -reihige quadratische Matrix ist, während die Funktion  $g(t, x)$  bei festem  $t$  für  $x \rightarrow 0$  schneller als  $\|x\|$  gegen 0 geht. In diesem Abschnitt setzen wir aber mehr voraus:

(A8) Die Matrix  $A(t) =: A$  ist konstant, und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\|g(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall \|x\| < \delta, t \geq 0. \quad (2.3.1)$$

In diesem Fall sagen wir: Die Funktion  $g$  ist eine *kleine Störung* der linearen Abbildung  $x \mapsto Ax$ .

Wenn  $f(t, x)$  von  $t$  nicht abhängt, ist diese Voraussetzung immer erfüllt, und diesen Fall eines *autonomen* Systems behandeln wir ausführlicher gegen Ende dieses Kapitels.

Um die Stabilität eines solchen Systems zu untersuchen, betrachten wir zuerst den besonders einfachen Fall  $g(t, x) \equiv 0$ . Dabei nennen wir einen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  *halbeinfach*, wenn er eine einfache Nullstelle des Minimalpolynoms von  $A$  ist. Dies ist bekanntlich äquivalent dazu, dass alle Blöcke der Jordanschen Normalform von  $A$  zu diesem Eigenwert eindimensional sind. Hinreichend dafür ist natürlich, dass  $\lambda$  auch einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $A$  ist.

**Satz 2.3.1** *Für eine beliebige  $n$ -reihige quadratische Matrix  $A$  ist die Null-Lösung des homogenen linearen Systems  $x' = Ax$*

- (a) *instabil, wenn ein Eigenwert von  $A$  positiven Realteil hat.*
- (b) *stabil, wenn kein Eigenwert einen positiven Realteil hat, und wenn alle rein imaginären Eigenwerte halbeinfach sind.*
- (c) *asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negative Realteile haben.*

**Beweis:** Sei  $T$  eine invertierbare Matrix, für welche  $J = T^{-1}AT$  in Jordanscher Normalform ist. Dann ist  $X(t) = T e^{tJ}$  ein Fundamentalsystem. Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  enthält dieses Fundamentalsystem eine Anzahl von Spalten der Form  $y(t) e^{\lambda t}$ , wobei der Vektor  $y(t)$  nur Polynome enthält und bei einem halbeinfachen Eigenwert sogar konstant ist. Daraus folgen die Behauptungen des Satzes.  $\square$

Jetzt zeigen wir für den allgemeinen Fall:

**Satz 2.3.2** *Unter den Voraussetzungen (A1)–(A8) seien die Realteile aller Eigenwerte von  $A$  negativ. Dann ist die Null-Lösung asymptotisch stabil. Genauer gilt: Es gibt Konstanten  $\delta, c, K > 0$  derart, dass*

$$\|x(t, 0, x_0)\| \leq K e^{-ct} \quad \forall x_0 \text{ mit } \|x_0\| < \delta.$$

**Beweis:** Da alle Eigenwerte von  $A$  nach Voraussetzung in der linken Halbebene von  $\mathbb{C}$  liegen, gibt es ein  $\alpha > 0$  derart, dass  $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$  ist für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$ . Durch Betrachten der Jordan-Normalform von  $A$  sieht man, dass dann für hinreichend großes  $\beta > 0$  gilt

$$\|e^{tA}\| \leq \beta e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Man rechnet direkt nach: Wenn  $x(t)$  für  $0 \leq t < t_1$  das System (2.1.1) löst, dann gilt

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} g(s, x(s)) ds \right) \quad \forall t \geq 0, \quad x_0 = x(0) \in \mathbb{K}^n, \quad (2.3.2)$$

und umgekehrt ist auch jede Lösung dieser Integralgleichung differenzierbar und erfüllt (2.1.1). Für ein noch zu wählendes  $\varepsilon > 0$  gibt es nach Voraussetzung ein  $\delta > 0$  so, dass (2.3.1) gilt, und wenn wir  $\|x_0\| < \delta$  wählen, dann gilt für hinreichend kleines  $t_1$  auch  $\|x(t)\| < \delta$  für alle  $0 < t < t_1$ . Hieraus folgt für  $u(t) := e^{\alpha t} \|x(t)\|$  die Abschätzung

$$u(t) \leq \beta \left( \|x_0\| + \varepsilon \int_0^t u(s) ds \right), \quad 0 \leq t < t_1,$$

Wegen der Grönwall-Ungleichung ist dann aber

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha t} \beta \|x_0\| e^{\beta \varepsilon t}, \quad 0 \leq t < t_1,$$

Wenn wir  $\varepsilon < \alpha/\beta$  und  $\|x_0\| < \delta/\beta$  wählen, folgt hieraus  $\|x(t)\| < \delta$  für alle diese  $t$ . Daher können wir  $t_1 \rightarrow \infty$  streben lassen, und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.3.3** *Unter den Voraussetzungen (A1)–(A8) habe  $A$  einen Eigenwert  $\lambda$  mit positivem Realteil. Dann ist die Null-Lösung instabil.*

**Beweis:** Falls  $A$  überhaupt nur Eigenwerte mit positiven Realteilen hat, kann man den folgenden Beweis stark vereinfachen – dies wird hier ausgelassen. Im anderen Fall sei  $T$  eine konstante invertierbare Matrix. Die Transformation  $x = Ty$  überführt das gegebene System in ein neues von derselben Form, aber mit  $T^{-1}AT$  an Stelle von  $A$ . Daher können wir im Beweis annehmen, dass  $A$  eine Jordanmatrix ist. Wenn wir eine weitere solche Transformation vornehmen mit einer Diagonalmatrix  $T$ , dann können wir sogar erreichen, dass an Stelle der Einsen in der Jordanmatrix (unterhalb der Diagonalen) eine beliebig kleine positiv-reelle Zahl  $\gamma$  steht. Weiter können wir voraussetzen, dass diejenigen Eigenwerte mit positiven Realteilen vor den übrigen stehen. Also ist  $A$  eine direkte Summe von Matrizen  $A_1$  und  $A_2$ , wobei die Eigenwerte von  $A_1$  Realteile haben, welche mindestens gleich einer positiven Zahl  $\sigma$  sind, während die Realteile aller Eigenwerte von  $A_2$  nicht positiv sind. Mit diesen Bezeichnungen ist das Differentialgleichungssystem äquivalent zu den beiden *gekoppelten Gleichungssystemen*

$$x_1' = A_1 x_1 + g_1(t, x), \quad x_2 = A_2 x_2 + g_2(t, x),$$

wobei  $x = (x_1, x_2)^T$  und  $g = (g_1, g_2)^T$  ist. Für  $\varepsilon < \sigma/10$  sei  $\eta > 0$  so, dass aus  $\|x\| \leq \eta$  folgt  $\|g(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\|$  für alle  $t \geq 0$ , was wegen (A8) möglich ist. Wir schreiben  $R(t) := \|x_1(t)\|$ ,  $\rho(t) := \|x_2(t)\|$ . Wenn wir annehmen, dass die Null-Lösung stabil ist, gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass aus  $R(0) + \rho(0) < \delta$  folgt  $R(t) + \rho(t) < \eta$  für alle  $t \geq 0$ . Es folgt unter Benutzung der oben getroffenen Normalisierungen von  $A_1$

$$2R(t)R(t)' = \frac{d}{dt} R(t)^2 = 2 \operatorname{Re}(\overline{x_1(t)}^T x_1(t)') \geq 2(\sigma R(t)^2 - \gamma R(t)^2 - \varepsilon R(t)(R(t) - \rho(t))).$$

Wenn man die Einschränkungen für  $\gamma$  und  $\varepsilon$  beachtet, folgt hieraus

$$R(t)' \geq \frac{\sigma}{2} R(t) - \varepsilon \rho(t).$$

Durch eine analoge (obere) Abschätzung ergibt sich

$$\rho(t)' \leq \varepsilon(\rho(t) + R(t)) + \frac{\sigma}{20} \rho(t).$$

Durch Subtraktion und nochmalige Benutzung der Einschränkungen für  $\gamma$  und  $\varepsilon$  findet man dann

$$\frac{d}{dt} (R(t) - \rho(t)) \geq \frac{\sigma}{4} (R(t) - \rho(t)),$$

woraus folgt dass  $R(t) - \rho(t) \geq (R(0) - \rho(0)) \exp(\sigma t/4)$  ist. Wenn man jetzt den Anfangswert  $x_0$  so wählt, dass  $R(0) > \rho(0)$  ist, was immer möglich ist, auch wenn  $R(0) + \rho(0) < \delta$  ist, erhält man einen Widerspruch dazu, dass die Lösung  $x(t)$  beschränkt bleiben muss.  $\square$

**Bemerkung 2.3.4** *Die Sätze dieses Abschnittes besagen, grob gesprochen, dass die Stabilität eines Differentialgleichungssystems in erster Linie vom linearen Anteil der Funktion  $f(t, x)$  abhängt. Wir werden dies in den Beispielen des nächsten Abschnittes noch genauer sehen.*

## 2.4 Autonome Systeme

**Definition 2.4.1** Ein Differentialgleichungssystem (2.1.1) heißt autonom, falls  $f(t, x) =: f(x)$  nicht von der Variablen  $t$  abhängt.

Durch Erweiterung des Zustandsraumes  $\mathbb{K}^n$  zu  $\mathbb{K}^{n+1}$  kann man zu jedem nicht-autonomen System ein äquivalentes autonomes System definieren: Sei  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})^T$ , und sei

$$g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} f(x_{n+1}, x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall (x_{n+1}, x) \in G.$$

Dann gilt:

- Genau dann, wenn (2.1.1) die Voraussetzungen (A1), (A2) erfüllt, tut dies auch das *transformierte System*

$$\tilde{x}' = g(\tilde{x}) \quad (x_{n+1}, x) \in G. \quad (2.4.1)$$

- Genau dann erfüllt (2.4.1) die Voraussetzung (A3) (in der neuen Variablen  $\tilde{x}$ ), wenn  $f(t, x)$  auch bezüglich  $t$  Lipschitz-stetig ist.
- Wenn  $x(t)$  eine Lösung von (2.1.1) zu den Anfangsdaten  $(t_0, x_0)$  ist, dann ist

$$\tilde{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), t)^T$$

eine Lösung des autonomen Systems (2.4.1) mit den Anfangsdaten  $(t_0, \tilde{x}_0)$  mit  $\tilde{x}_0 = (x_0, t_0)^T$ .

- Sei  $\tilde{x}(t)$  eine Lösung von (2.4.1) mit den Anfangsdaten  $(t_0, \tilde{x}_0)$ . Mit  $\tilde{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_{n+1}^{(0)})^T$  folgt  $x_{n+1}(t) = t - t_0 + x_{n+1}^{(0)}$ , und  $x(t)$  löst das AWP

$$x' = f(t - t_0 + x_{n+1}^{(0)}, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Für  $t_0 = x_{n+1}^{(0)}$  erhalten wir also wieder eine Lösung von (2.1.1). Also ist ein allgemeines System immer äquivalent zu einem autonomen System!

Wegen der oben beschriebenen Äquivalenz von (2.1.1) und (2.4.1) kann man sich in vielen Fällen darauf beschränken, autonome Systeme zu untersuchen. Allerdings muss man folgendes beachten: Wenn (2.1.1) eine globale Lösung besitzt, dann kann man wie bereits beschrieben eine Transformation durchführen, welche diese Lösung in die Null-Lösung überführt, und dann sind in der Regel die weiteren Voraussetzungen (A4)–(A7) erfüllt. Das entsprechende autonome System (2.4.1) hat dann zwar eine globale Lösung, diese ist aber nicht gleich der Null-Lösung, denn  $g(0) \neq 0$ . Wenn man diese globale Lösung in die Null-Lösung transformiert, zerstört man wiederum die Autonomie des Systems, und daher kann man die Ergebnisse des letzten Abschnittes nicht in jedem Fall anwenden!

## 2.5 Gleichgewichtslösungen bei autonomen Systemen

In diesem Abschnitt betrachten wir neben allgemeinen autonomen Systemen das folgende einfache Modell zur Beschreibung der Entwicklung zweier *Populationen*, von denen die eine die Rolle von *Räubern*, die andere von *Beutetieren* spielt. Dabei bezeichnen  $x_1(t)$  bzw.  $x_2(t)$  die Anzahl der Beutetiere bzw. Räuber zu einem Zeitpunkt  $t$ , und wir nehmen an, dass mit positiven reellen Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  die folgenden Beziehungen gelten:

$$x_1' = x_1(a - bx_2), \quad x_2' = -x_2(c - dx_1). \quad (2.5.1)$$

Hier wird vernachlässigt, dass die beiden (unbekannten) Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  eigentlich nur ganzzahlige Werte annehmen können. Die Form der Gleichungen drückt aus, dass bei Abwesenheit der Räuber (also für  $x_2(t) \equiv 0$ ) die Beutetiere exponentiell anwachsen, während bei Abwesenheit von Beutetieren die Räuber exponentiell aussterben. Anwesenheit von Räubern schwächt dagegen das Wachstum der Beutetierpopulation (für Werte  $0 < bx_2 < a$ ) bzw. lässt die Größe der Population sogar abnehmen (für Werte  $bx_2 > a$ ). Entsprechendes gilt für die Anzahl der Räuber. Das Differentialgleichungssystem (2.5.1) wird in der Literatur als *Lotka-Volterrasches Räuber-Beute-Modell* behandelt. Wie wir sehen werden, eignet es sich, trotz seiner Einfachheit, zur Erklärung einer früher gemachten Beobachtung, dass sich zwei Populationen von Räubern und Beutetieren in Zykeln entwickeln.

Das obige Modell ist insoweit zu einfach, als z. B. die Beutetierzahl auf Grund von Futterknappheit o. ä. auch bei Abwesenheit von Räubern nur über sehr kurze Zeiträume exponentiell wächst. Daher wird neben dem obigen Modell auch gerne ein weiteres betrachtet, bei dem man mit (kleinen) positiven Parametern  $e$  und  $f$  zwei weitere Terme hinzufügt, welche bei großen Populationszahlen wirksam werden. Man erhält dann ein verbessertes Modell, nämlich

$$x_1' = x_1(a - bx_2) - ex_1^2, \quad x_2' = -x_2(c - dx_1) - fx_2^2. \quad (2.5.2)$$

Da man für  $e = f = 0$  aus dem zweiten Modell das erste erhält, wollen wir zunächst das allgemeinere System (2.5.2) betrachten.

Die beiden obigen Systeme sind Spezialfälle eines allgemeinen autonomen Differentialgleichungssystems in zwei Dimensionen

$$x' = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T, \quad x \in G.$$

Wir wollen einige typische Sprechweisen in der *qualitativen Theorie* solcher Systeme vorstellen, ohne z. B. den (selbsterklärenden) Begriff der *Bahn* einer Lösung formal zu definieren:

- Ist  $x(t)$ ,  $t \in I$ , eine Lösung eines autonomen Systems, so ist auch  $x(t + t_0)$ ,  $t \in I_{t_0}$ , eine Lösung.
- Wenn  $f$  Lipschitz-stetig ist, können sich die Bahnen von Lösungen nicht schneiden.
- Wenn es eine nicht konstante periodische Lösung gibt, ist ihre Bahn der Träger einer einfach geschlossenen Kurve in  $\mathbb{R}^2$ , und diese zerlegt nach dem Jordanschen Kurvensatz die Ebene in zwei disjunkte Gebiete, nämlich ein beschränktes *Innengebiet* und ein unbeschränktes *Außengebiet*. Lösungen, welche in einem der Gebiete starten, können die periodische Lösung nicht schneiden und bleiben deshalb immer in diesem Gebiet.
- Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  heißt *Gleichgewichtspunkt* eines solchen Systems, wenn  $f(x_0) = 0$  ist, da dann die Funktion  $x(t) \equiv x_0$  eine (globale) Lösung ist. Für die Anwendungen wichtig ist die Frage, ob ein solcher Gleichgewichtspunkt stabil ist. Dies lässt sich meist durch Untersuchung der Matrix  $f'(x_0)$  klären: Wir schreiben (mit der Taylorformel bei entsprechender Differenzierbarkeit von  $f(x)$ , unter Beachtung von  $f(x_0) = 0$  in einem Gleichgewichtspunkt)

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + g(x).$$

wobei gilt  $\|g(x)\| \leq C \|x - x_0\|^2$  für  $x \rightarrow x_0$ , mit einer geeigneten Konstanten  $c > 0$ . Aus der Tatsache, dass  $f'(x_0)$  eine reelle zweidimensionale Matrix ist, folgt dass ihre Eigenwerte entweder beide reell oder zueinander konjugiert komplex sind. Mit der Transformation  $x = x_0 + y$  und der Anwendung der Sätze 2.3.2 und 2.3.3 folgt, dass die Gleichgewichtslösung asymptotisch stabil ist falls beide Eigenwerte in der linken Halbebene liegen, bzw. instabil falls mindestens ein Eigenwert in der rechten Halbebene liegt. Die übrigen Fälle bleiben offen.

Im Fall von (2.5.2) sind nur Punkte im ersten Quadranten von  $\mathbb{R}^2$  von Interesse, und daher haben wir (bei kleinen Werten von  $e$  und  $f$ ) nur einen Gleichgewichtspunkt, nämlich die Lösung  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$  des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$bx_2 + ex_1 = a, \quad dx_1 - fx_2 = c. \quad (2.5.3)$$

In unserem Beispiel (2.5.2) ist

$$f'(x) = \begin{bmatrix} a - bx_2 - 2ex_1 & -bx_2 \\ dx_2 & -c + dx_1 - 2fx_2 \end{bmatrix},$$

und speziell für  $x = x_0$  erhalten wir mit (2.5.3)

$$f'(x_0) = \begin{bmatrix} -ex_1^{(0)} & -bx_2^{(0)} \\ dx_2^{(0)} & -fx_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist positiv, ihre Spur dagegen ist negativ (oder = 0 im Fall von (2.5.1)). Daher müssen die beiden Eigenwerte entweder reell und negativ oder zueinander konjugiert komplex sein und negativen Realteil haben (bzw. rein imaginär sein für (2.5.1)). Daraus folgt für das System (2.5.2) die asymptotische Stabilität der Gleichgewichtslösung, während die allgemeinen Ergebnisse für das erste Modell nicht anwendbar sind. Wir wollen aber jetzt das System (2.5.1) noch genauer untersuchen:

Um herauszufinden, wie Lösungen von (2.5.1) wirklich (qualitativ) aussehen, ist es von Bedeutung, ein sogenanntes *erstes Integral* zu finden; dies ist eine Funktion  $F(x_1, x_2)$ , welche beim Einsetzen von Lösungen  $(x_1(t), x_2(t))^T$  konstant ist. Dazu bilden wir geeignete Kombinationen der beiden Gleichungen; genauer erkennt man mit etwas Phantasie, dass

$$\frac{d}{dt} (dx_1 + bx_2 - c \log x_1 - a \log x_2) = dx_1' + bx_2' - c \frac{x_1'}{x_1} - a \frac{x_2'}{x_2} = 0$$

ist. Also ist die Funktion  $F(x_1, x_2) = dx_1 + bx_2 - c \log x_1 - a \log x_2$  ein solches erstes Integral. Man kann zeigen, dass die Niveaulinien, d. h., die Lösungen der Gleichung  $F(x_1, x_2) = K$  mit gegebenem  $K \in \mathbb{R}$ , geschlossene Kurven im ersten Quadranten sind, und durch Studium des Richtungsfeldes von (2.5.1) findet man, dass die Lösungen sich periodisch entlang dieser Niveaulinien bewegen.

**Aufgabe 2.5.1** Zeige die oben gemachten Aussagen über die Funktion  $F$  bzw. die Lösungen von (2.5.1).  
**Anleitung:** Zeige dass jede Niveaulinie von  $F$  jede Gerade durch den Gleichgewichtspunkt zweimal schneidet, und dass die Schnittpunkte vom Gleichgewichtspunkt aus gesehen auf unterschiedlichen Seiten der Geraden liegen.



# Kapitel 3

## Eigenwertaufgaben

In diesem Kapitel wollen wir die Theorie der kompakten Operatoren aus der *Funktionalanalysis* anwenden, um klassische Resultate über Rand- und Eigenwertaufgaben herzuleiten. Diese Ergebnisse sind eigentlich älter als die Funktionalanalysis, und man kann sie daher auch elementar beweisen. Für eine solche Herleitung sei auf das Buch von *Coddington und Levinson* [6] verwiesen. Allerdings vereinfachen sich viele Argumente sehr stark, wenn man die funktionalanalytischen Resultate benutzt. Da aber die Greensche Funktion einen sehr speziellen Fredholmschen Integral-Operator darstellt, erhalten wir zum Teil auch deutlich bessere Ergebnisse als für den allgemeinen Fall eines kompakten Operators: Im selbstadjungierten Fall haben wir immer unendlich viele Eigenwerte, und die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

### 3.1 Ein Beispiel

In diesem Abschnitt betrachten wir die sehr einfache *Eigenwertaufgabe* (EWA)

$$-x'' = \lambda x, \quad x(0) = x(1) = 0, \quad (3.1.1)$$

für eine unbekannte (komplexwertige) zweimal stetig differenzierbare Funktion  $x(t)$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$ . Dabei ist  $\lambda$  ein komplexer Parameter. Dieses Problem tritt z. B. auf, wenn man die Schwingungen einer Saite untersucht – wenn die Zeit hierzu ausreicht, werden wir uns im letzten Kapitel damit beschäftigen.

Für  $\lambda = 0$  ist die Nullfunktion die einzige Lösung dieser EWA, und deshalb sei jetzt  $\lambda \neq 0$  vorausgesetzt. Dann sind die Funktionen  $x_{\pm}(t) = e^{\pm i\lambda^{1/2}t}$  ein Fundamentalsystem der Dgl  $-x'' = \lambda x$ , wobei  $\lambda^{1/2}$  eine der beiden (komplexen) Quadratwurzeln von  $\lambda$  ist. Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = a e^{i\lambda^{1/2}t} + b e^{-i\lambda^{1/2}t}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Dabei gilt  $x(0) = 0$  genau dann wenn  $b = -a$ , also  $x(t) = c \sin(\lambda^{1/2}t)$  ist, mit  $c = 2ia$ . Die weitere Gleichung  $x(1) = 0$  ist (für  $c \neq 0$ ) äquivalent zu  $\lambda = \pi^2 k^2$ , mit  $k \in \mathbb{N}$ . Diese Zahlen heißen dann *die Eigenwerte* der EWA, und die Funktionen  $x_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t)$  heißen zugehörige *Eigenfunktionen*. Der Vorfaktor ist dabei so gewählt, dass gilt

$$\int_0^1 x_j(t) x_k(t) dt = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Dies bedeutet, dass die Eigenfunktionen dieser einfachen EWA ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ , also der Menge der auf  $[0, 1]$  Lebesgue-messbaren Funktionen mit endlicher 2-Norm, bilden. Was wir in diesem Kapitel untersuchen wollen, ist die Frage, inwieweit bei anderen linearen Differentialgleichungen ähnliche Resultate gelten:

- Gibt es immer abzählbar viele Eigenwerte und Eigenfunktionen?
- Sind die Eigenfunktionen immer orthogonal (und die Eigenwerte reell)?
- Sind die Eigenfunktionen sogar ein vollständiges Orthonormalsystem?

Dass dies nicht immer so ist, zeigt folgendes weitere Beispiel: Die EWA

$$ix' = \lambda x, \quad x(1) = ax(0),$$

mit einer komplexen Konstanten  $a$ , hat als Eigenwerte alle Lösungen der Gleichung  $e^{-i\lambda} = a$ , also alle Werte  $\lambda_k = i \log a = i \log |a| - \arg(a) - 2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\arg(a)$  irgendein fest gewählter Wert der Argumentfunktion. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind gleich  $x_k(t) = \exp[-i\lambda_k t]$ . Man rechnet nach, dass die Eigenfunktionen genau dann orthogonal (und die Eigenwerte reell) sind, wenn  $|a| = 1$  ist.

**Aufgabe 3.1.1** *Berechne Eigenwerte und Eigenfunktionen für die EWA*

$$ix' = \lambda x, \quad x(0) - x(1) = 0.$$

## 3.2 Selbstadjungiertheit

Im Folgenden betrachten wir immer zwei feste Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , und bezeichnen mit  $\mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_2(a, b)$  die Menge der auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  Lebesgue-messbaren Funktionen  $x(t)$  mit  $\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$ . Wir setzen weiter<sup>1</sup> für  $x, y \in \mathcal{L}_2(a, b)$

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Weiter sei  $n$  eine feste natürliche Zahl, und

$$Lx := p_0(t)x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x$$

sei ein linearer Differentialoperator  $n$ -ter Ordnung mit Koeffizientenfunktionen<sup>2</sup>  $p_k \in C := C[a, b]$ . Schließlich soll der Koeffizient  $p_0(t)$  keine Nullstellen auf  $[a, b]$  haben. Für zwei quadratische  $n$ -reihige Matrizen  $M = [m_{jk}]$  und  $N = [n_{jk}]$  schreiben wir

$$U_j x := \sum_{k=1}^n (m_{jk} x^{(k-1)}(a) + n_{jk} x^{(k-1)}(b)), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Das System der  $n$  Gleichungen  $U_j x = 0$  schreiben wir dann einfach kurz als  $Ux = 0$ . Wenn wir  $y(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$  setzen, können wir die Randbedingungen auch durch das homogene lineare Gleichungssystem

$$My(a) + Ny(b) = 0$$

ausdrücken.

**Aufgabe 3.2.1** *Finde Matrizen  $N$  und  $M$ , welche für  $n = 2$  die Randbedingungen  $x(a) = x(b) = 0$  ergeben.*

<sup>1</sup>Da wir im Folgenden immer stetige Funktionen integrieren wollen, spielt es nur eine geringe Rolle dass hierdurch kein "richtiges" inneres Produkt auf  $\mathcal{L}_2(a, b)$  definiert wird.

<sup>2</sup>Später werden wir voraussetzen, dass  $p_k$  wenigstens  $(n - k)$ -mal stetig differenzierbar sein soll, damit wir feststellen können, in welchen Fällen  $L$  selbstadjungiert ist.

**Definition 3.2.2 (Selbstadjungiertheit)** Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  nennen wir

$$Lx = \lambda x, \quad Ux = 0 \quad (3.2.1)$$

die Eigenwertaufgabe (EWA) zum Randwertproblem  $(L, U)$ . Jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für welche die Eigenwertaufgabe eine nicht-triviale Lösung  $x$  besitzt, nennen wir einen Eigenwert, und jede solche Lösung heißt zu  $\lambda$  gehörige Eigenfunktion der EWA bzw. von  $(L, U)$ . Die Menge aller Lösungen von (3.2.1), einschließlich der trivialen, heißt zugehöriger Eigenraum. Die auf  $[a, b]$  mindestens  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, welche die Randbedingungen  $Ux = 0$ , aber vielleicht nicht die Differentialgleichung, erfüllen, sollen für die EWA zulässig heißen; die Menge der zulässigen Funktionen werde mit  $D$  bezeichnet und spielt die Rolle des Definitionsbereiches des Operators  $L$ , obwohl dieser eigentlich auf ganz  $C^{(n)}[a, b]$  definiert ist. Wenn für alle Funktionen  $u, v \in D$  immer gilt

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle, \quad (3.2.2)$$

dann nennen wir die Eigenwertaufgabe selbstadjungiert.

**Bemerkung 3.2.3** Der Differentialoperator  $L$  ist nicht für alle  $x \in \mathcal{L}_2$  definierbar. Wir betrachten ihn auf dem Unterraum  $D \subset C^{(n)} := C^{(n)}[a, b]$  der auf  $[a, b]$  mindestens  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen. Man kann sehen, dass  $D$  in  $\mathcal{L}_2$  dicht ist – sogar die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen an den Randpunkten  $a, b$  alle verschwinden, liegt dicht. Dieser Unterraum wird allerdings von  $L$  nicht etwa in sich selber abgebildet, und deshalb ist  $L$  kein Endomorphismus auf  $D$ . Außerdem ist  $L : D \rightarrow \mathcal{L}_2$  nicht beschränkt!

Welche Eigenwertaufgaben selbstadjungiert sind, soll hier nicht genau untersucht werden. Jedenfalls folgt, unter der Voraussetzung dass  $p_{n-k} \in C^{(k)}$  ist, mit partieller Integration und der Leibnizregel für höhere Ableitungen eines Produktes

$$\int_a^b p_{n-k}(t) u^{(k)}(t) \overline{v(t)} dt = c_k + (-1)^k \int_a^b u(t) \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_{n-k}^{(k-j)}(t) \overline{v^{(j)}(t)} \right) dt,$$

mit einer Zahl  $c_k$ , welche nur von den Randwerten der Ableitungen von  $u$  und  $v$  bis zur Ordnung  $k-1$  abhängt. Daher ist die Aufgabe jedenfalls dann selbstadjungiert, wenn  $\sum_k c_k = 0$  ist für alle zulässigen Funktionen  $u$  und  $v$ , und wenn weiter gilt

$$p_{n-j}(t) = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} (-1)^k \overline{p_{n-k}^{(k-j)}(t)} \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Ob diese Bedingungen auch notwendig sind, spielt hier keine Rolle und soll deshalb nicht weiter untersucht werden. Statt dessen betrachten wir noch folgendes wichtige

**Beispiel 3.2.4 (Sturm-Liouillesche EWA)** Seien  $p, q$  reellwertige, entsprechend oft differenzierbare Funktionen auf  $[a, b]$ , und sei  $p(t) > 0$  auf  $[a, b]$ . Ein Differentialoperator zweiter Ordnung der Form

$$(p(t)x')' - q(t)x = 0,$$

wird auch Sturm-Liouillescher Operator genannt. Die zugehörige Eigenwertaufgabe ist selbstadjungiert, wenn für alle zulässigen Funktionen  $u, v$  immer gilt

$$p(t) (u'(t)v(t) - u(t)v'(t)) \Big|_a^b = p(b) \det \begin{bmatrix} v(b) & u(b) \\ v'(b) & u'(b) \end{bmatrix} - p(a) \det \begin{bmatrix} v(a) & u(a) \\ v'(a) & u'(a) \end{bmatrix} = 0.$$

Es liegt also an der Form der Randbedingungen, ob dies zutrifft – vergleiche hierzu die nächste Aufgabe.

**Aufgabe 3.2.5** Zeige dass eine Sturm-Liouvillesche EWA genau dann selbstadjungiert ist, wenn der Rang der Matrix  $[M, N]$  maximal, also gleich 2 ist, und wenn zusätzlich gilt

$$p(a) \det M = p(b) \det N.$$

**Anleitung:** Beachte dass für zwei beliebige zweireihige quadratische Matrizen  $X_a$  und  $X_b$  immer zwei Funktionen  $u, v \in C$  existieren mit

$$X_a = \begin{bmatrix} v(a) & u(a) \\ v'(a) & u'(a) \end{bmatrix}, \quad X_b = \begin{bmatrix} v(b) & u(b) \\ v'(b) & u'(b) \end{bmatrix}.$$

Daher ist die EWA genau dann selbstadjungiert, wenn aus der Gleichung  $M X_a + N X_b = 0$  folgt dass  $p(a) \det X_a = p(b) \det X_b$  ist. Zeige dann zunächst: Wenn der Rang von  $[M, N]$  kleiner als 2 ist, dann gibt es immer Matrizen  $X_a, X_b$  mit  $M X_a + N X_b = 0$ , für welche  $p(a) \det X_a \neq p(b) \det X_b$  ist.

**Aufgabe 3.2.6** Zeige: Ist  $c \in \mathbb{R}$ , und ist  $(L, U)$  selbstadjungiert, so ist auch  $(L + c, U)$  selbstadjungiert. Finde heraus, wie die Eigenräume der beiden Aufgaben zusammenhängen.

**Aufgabe 3.2.7** Seien  $x_1, \dots, x_n, \lambda \in \mathbb{C}$  und  $c \in [a, b]$ . Zeige: Die nach Picard-Lindelöf eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$Lx = \lambda x, \quad x^{(k-1)}(c) = x_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3.2.3)$$

und auch alle ihre Ableitungen nach  $t$  bis zur Ordnung  $n-1$ , sind für jedes feste  $t \in [a, b]$  ganze Funktionen in  $\lambda$ .

Obwohl die Definition der Selbstadjungiertheit genau der aus LA I zu entsprechen scheint, gibt es einen kleinen aber wichtigen Unterschied: Der Operator  $L$  ist nicht auf ganz  $\mathcal{L}_2$  definiert, sondern nur auf dem dichten Unterraum  $D$ . Dieser Unterraum wird aber wiederum nicht in sich selber abgebildet, und deshalb kann man nicht direkt schließen, dass z. B. alle Eigenwerte von  $L$  reell sind. Allerdings kann man dieselben Beweisschritte wie im Fall eines selbstadjungierten Endomorphismus anwenden, um zu zeigen, dass es nur reelle Eigenwerte gibt, und dass Eigenfunktionen ein ONS bilden.

**Satz 3.2.8** Für jede selbstadjungierte Eigenwertaufgabe gilt:

- (a) Alle Eigenwerte sind reell.
- (b) Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- (c) Es gibt höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte.
- (d) Die Menge aller Eigenwerte hat keinen endlichen Häufungspunkt.

**Beweis:** Die Behauptungen (a) und (b) kann man genau wie in LA I beweisen. Seien  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $c \in [a, b]$ , und seien  $x_j(t) = x_j(t, \lambda)$  die (nach Picard-Lindelöf) eindeutig bestimmten Lösungen des Anfangswertproblems (AWP)

$$Lx = \lambda x, \quad x^{(k-1)}(c) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Da die Lösungen  $x_j$  sogar ein Fundamentalsystem bilden, ist  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert von  $L$ , wenn es Konstanten  $c_1, \dots, c_n$  gibt, die nicht alle verschwinden, so dass die Linearkombination  $x(t) := c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$  die Randbedingungen  $Ux = 0$  erfüllt. Dies ist gerade ein homogenes lineares Gleichungssystem von  $n$  Gleichungen in den Unbekannten  $c_1, \dots, c_n$ . Die Koeffizientenmatrix dieses Systems enthält nur die  $t$ -Ableitungen der Funktionen  $x_j(t)$  bis zur Ordnung  $n-1$ , und zwar für  $t = a$  und für  $t = b$ , welche nach Aufgabe 3.2.7 ganze Funktion von  $\lambda$  sind. Somit ist auch die Determinante der Koeffizientenmatrix eine ganze Funktion von  $\lambda$ , und ihre Nullstellen sind gerade die Eigenwerte von  $L$  (da ein homogenes quadratisches Gleichungssystem genau dann eine nicht-triviale Lösung hat, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet). Da nach (a) diese Determinante nicht gleich der Nullfunktion sein kann, folgen (c) und (d) aus dem Nullstellensatz für holomorphe Funktionen.  $\square$

**Bemerkung 3.2.9** Beachte, dass der Beweis der Aussagen (c) und (d) im obigen Satz nicht wirklich von der Selbstadjungiertheit der EWA abhängt, sondern lediglich benutzt, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht identisch verschwindet. Ob dies so ist, hängt von der Form der Randbedingungen ab – z. B. ist es nicht so, wenn beide Matrizen  $M$  und  $N$  Nullmatrizen sind.

### 3.3 Die Greensche Funktion

Im Allgemeinen gibt es außer den Eigenwerten noch andere Spektralwerte eines linearen Operators. Um dies zu untersuchen, betrachten wir jetzt das inhomogene Problem

$$Lx = \lambda x + f, \quad Ux = 0, \quad (3.3.1)$$

mit einer gegebenen Funktion  $f$ , die wir momentan als stetig voraussetzen wollen. Die Menge  $C$  der auf  $[a, b]$  stetigen Funktionen ist ein Banachraum unter der Supremumsnorm, und  $L$  ist ein unbeschränkter Operator in  $C$  mit dem Definitionsbereich  $D$ . Wir wollen  $L$  *nicht entartet* nennen, wenn nicht jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $(L, U)$  ist. Wie im Beweis von Satz 3.2.8 folgt dann, dass die Menge  $\sigma$  aller Eigenwerte von  $(L, U)$  *diskret* ist, was heißen soll, dass  $\sigma$  abzählbar ist und keinen endlichen Häufungspunkt hat. Wenn wir zeigen, dass es zu jedem  $f \in C$  und jedem  $\lambda \notin \sigma$  genau eine Lösung  $x \in D$  von (3.3.1) gibt, und dass die (offensichtlich lineare) Abbildung  $f \mapsto x$  auf  $C$  beschränkt ist, haben wir insbesondere bewiesen, dass  $\sigma$  gleich dem Spektrum des Operators  $L$  (in  $C$ ) mit Definitionsbereich  $D$  ist, dass es also außer den Eigenwerten keine weiteren Spektralwerte gibt. Dies gilt natürlich trivialerweise auch, wenn  $L$  entartet ist.

Dass die Gleichung (3.3.1) für  $\lambda \notin \sigma$  höchstens eine Lösung haben kann, ist klar, da die Differenz zweier Lösungen immer die EWA (3.2.1) erfüllt. Der nun folgende Satz liefert gerade die Existenz einer Lösung und gibt sogar eine Darstellungsformel:

**Satz 3.3.1 (Greensche Funktion)** Gegeben sei eine nicht entartete Eigenwertaufgabe. Sei  $O = \mathbb{C} \setminus \sigma$  das Komplement der zugehörigen Eigenwertmenge. Dann existiert genau eine Funktion  $G(t, \tau, \lambda)$ , definiert auf  $[a, b]^2 \times O$ , mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Die partiellen Ableitungen von  $G$  nach  $t$  bis zur Ordnung  $n - 1$  existieren auf dem ganzen Definitionsbereich  $[a, b]^2 \times O$ .
- (b) Die partiellen Ableitungen von  $G$  nach  $t$  bis zur Ordnung  $n - 2$  sind auf dem ganzen Definitionsbereich  $[a, b]^2 \times O$  stetig.
- (c) Die  $(n - 1)$ -ste partielle Ableitung von  $G$  nach  $t$  ist stetig auf

$$(\{a \leq \tau \leq t \leq b\} \times O) \cup (\{a \leq t < \tau \leq b\} \times O) \subset [a, b]^2 \times O.$$

Die einseitigen Grenzwerte  $G^{(n-1)}(\tau + 0, \tau, \lambda)$  ( $= G^{(n-1)}(\tau, \tau, \lambda)$ ) und  $G^{(n-1)}(\tau - 0, \tau, \lambda)$  dieser Ableitung existieren für  $t \rightarrow \tau$ , und  $G^{(n-1)}(\tau + 0, \tau, \lambda) - G^{(n-1)}(\tau - 0, \tau, \lambda) = 1/p_0(\tau)$ , für alle  $(\tau, \lambda) \in [a, b] \times O$ .

- (d) Für alle festen  $(t, \tau) \in [a, b]^2$  ist  $G$  eine holomorphe Funktion auf  $O$ , und die Punkte von  $\sigma$  sind höchstens Polstellen von  $G$ .
- (e) Für alle festen  $(\tau, \lambda) \in [a, b] \times O$  und  $t \neq \tau$  ist  $G$  sogar  $n$ -mal nach  $t$  stetig partiell differenzierbar und eine Lösung der Gleichung  $Lx = \lambda x$ .
- (f) Für alle festen  $(\tau, \lambda) \in (a, b) \times O$  erfüllt  $G$  die Randbedingungen.

Für diese Funktion  $G$  und beliebiges  $f \in C[a, b]$  sowie  $\lambda \in O$  ist durch

$$x(t) = (\mathcal{G}_\lambda f)(t) := \int_a^b G(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau \quad (3.3.2)$$

eine Lösung des inhomogenen Problems (3.3.1) gegeben.

**Beweis:** Wenn  $G$  und  $\tilde{G}$  zwei Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften sind, dann ist ihre Differenz  $d = G - \tilde{G}$  entsprechend nach  $t$  partiell differenzierbar, und wegen Eigenschaft (c) ist die  $(n - 1)$ -ste partielle Ableitung von  $d$  in den Punkten  $t = \tau$  stetig ergänzbar. Da  $G$  und  $\tilde{G}$  beide für  $t \neq \tau$  die Gleichung  $Lx = \lambda x$  erfüllen, tut dies  $d$  ebenfalls, und hieraus folgt sogar Existenz und Stetigkeit der  $n$ -ten  $t$ -Ableitung von  $d$  an den Stellen  $t = \tau$ . Somit ist  $d$  für  $a < \tau < b$  eine Lösung der EWA und muss deshalb wegen  $\lambda \notin \sigma$  identisch verschwinden. Um jetzt die Existenz eines solchen  $G$  zu zeigen, verwenden wir die Methode der *Variation der Konstanten*, welche sich am elegantesten für Systeme formulieren lässt. Wir betrachten dazu ein Fundamentalsystem  $(x_j(t, \lambda))_{j=1}^n$  wie im Beweis von Satz 3.2.8, wobei wir der Einfachheit halber  $c = b$  wählen, und bilden

$$Y(t, \lambda) = \begin{bmatrix} x_1(t, \lambda) & \dots & x_n(t, \lambda) \\ x_1'(t, \lambda) & \dots & x_n'(t, \lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t, \lambda) & \dots & x_n^{(n-1)}(t, \lambda) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Für diese gilt dann  $Y(b, \lambda) = I$ , und mit der Wronski-Identität folgt  $\det Y(t, \lambda) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  (tatsächlich ist die Determinante von  $\lambda$  unabhängig, was aber keine Rolle spielt). Nach Aufgabe 3.2.7 ist die Matrix  $Y(t, \lambda)$  eine ganze Funktion in  $\lambda$ , und da sie immer invertierbar ist, folgt das gleiche auch für die inverse Matrix, z. B. aus der Darstellungsformel mittels Kofaktoren. Für beliebiges  $c \in \mathbb{C}^n$  ist dann der Vektor

$$y(t, \lambda) = Y(t, \lambda) \left[ c + \int_a^t Y^{-1}(\tau, \lambda) g(\tau) \frac{d\tau}{p_0(\tau)} \right]$$

die allgemeine Lösung des zu  $Lx = \lambda x + f$  äquivalenten Systems. Die Randbedingungen sind dann äquivalent zu dem inhomogenen linearen Gleichungssystem

$$(MY(a, \lambda) + N)c = -N \int_a^b Y^{-1}(\tau, \lambda) g(\tau) \frac{d\tau}{p_0(\tau)}$$

für den (unbekannten) Vektor  $c$ . Für  $\lambda \in O$  besitzt dieses System eine eindeutige Lösung, und nach der Cramerschen Regel schließen wir, dass diese Lösung eine meromorphe Funktion von  $\lambda$  ist, also holomorph in  $O$  mit (möglichen) Polen an den Punkten von  $\sigma$ . Wenn wir diese Lösung einsetzen, so folgt

$$y(t, \lambda) = \int_a^b H(t, \tau, \lambda) g(\tau) d\tau,$$

mit der Matrix  $H(t, \tau, \lambda) = [h_{jk}(t, \tau, \lambda)]$  gegeben durch

$$p_0(\tau) H(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} Y(t, \lambda) (I - (MY(a, \lambda) + N)^{-1} N) Y^{-1}(\tau, \lambda) & (a \leq \tau \leq t \leq b) \\ -Y(t, \lambda) (MY(a, \lambda) + N)^{-1} N Y^{-1}(\tau, \lambda) & (a \leq t < \tau \leq b) \end{cases}$$

Also gilt  $p_0(\tau) (H(\tau + 0, \tau, \lambda) - H(\tau - 0, \tau, \lambda)) = I$ . Die erste Komponente des Vektors  $y(t, \lambda)$  ist dann die gesuchte Lösung  $x(t, \lambda)$  von (3.3.1), während die übrigen gerade die Ableitungen bis zur Ordnung  $n - 1$  ergeben. Wegen der speziellen Form des Vektors  $g(t)$  sehen wir, dass (3.3.2) gilt, wenn wir  $G(t, \tau, \lambda)$  gleich  $h_{1n}(t, \tau, \lambda)/p_0(\tau)$  setzen. Diese Position der Matrix involviert nur die erste Zeile der Matrix  $Y(t, \lambda)$ , also nur die Funktionen  $x_k(t, \lambda)$ , nicht aber deren Ableitungen. Aus dieser Tatsache und der Definition von  $G$  liest man dann die Eigenschaften (a)–(e) ab. Die letzte Eigenschaft folgt, da man für  $a < \tau < b$  und  $\lambda \in O$  nachrechnen kann, dass  $MH(a, \tau, \lambda) + NH(b, \tau, \lambda) = 0$  ist.  $\square$

**Definition 3.3.2** Die Funktion  $G(t, \tau, \lambda)$  im obigen Satz heißt die Greensche Funktion zu (3.3.1).

**Bemerkung 3.3.3** Die durch (3.3.2) definierte lineare Abbildung  $f \mapsto \mathcal{G}_\lambda f$  ist wegen der Eigenschaften der Greenschen Funktion ein beschränkter Operator auf  $C$ . Also ist  $\sigma$  im Sinne der Funktionalanalysis gerade das Spektrum von  $L$  auf dem Definitionsbereich  $D$ .

**Aufgabe 3.3.4** Berechne die Greensche Funktion zum Beispiel (3.1.1).

### 3.4 Der Greensche Operator

**Definition 3.4.1** Wir nennen einen Operator  $L$  normalisiert, wenn  $0 \notin \sigma$  ist. Ist dies der Fall, so schreiben wir statt  $\mathcal{G}_0$  bzw.  $G(t, \tau, 0)$  auch einfacher  $\mathcal{G}$  bzw.  $G(t, \tau)$ . Der Operator  $\mathcal{G}$  soll auch kurz Greenscher Operator heißen.

**Bemerkung 3.4.2** Ein normalisierter Operator ist offensichtlich nicht entartet. Beachte dass wir umgekehrt im nicht entarteten Fall immer annehmen können, dass  $L$  normalisiert ist, da wir sonst  $L$  durch  $L - c$  ersetzen können, und dabei ist  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert von  $L$ , wenn  $\lambda - c$  einer für  $L - c$  ist. Wenn  $c \in \mathbb{R}$  gewählt wird, ist sogar die Selbstadjungiertheit von  $(L, U)$  äquivalent zu der von  $(L - c, U)$ .

Mit dieser Normalisierung erhalten wir folgende Resultate für die Operatoren  $L$  und  $\mathcal{G}$ :

- Die Abbildungen  $L$  und  $\mathcal{G}$  sind invers zueinander. Genauer gilt

$$L\mathcal{G}f = f, \quad \mathcal{G}Lx = x \quad \forall f \in C, \quad x \in D. \quad (3.4.1)$$

Außerdem gelten die Randbedingungen für alle Funktionen  $x = \mathcal{G}f$  mit  $f \in C$ . Anders ausgedrückt heißt das, dass  $\mathcal{G}$  von  $C$  bijektiv auf  $D$  abbildet, und dass  $L$  die Umkehrabbildung ist.

- Ist  $\lambda \in \sigma$  (also insbesondere wegen der Normalisierung  $\lambda \neq 0$ ), so gilt für jede zugehörige Eigenfunktion  $x$  die Gleichung  $x = \lambda \mathcal{G}x$ . Weiter folgt: Ist  $x = \lambda \mathcal{G}x$  für ein  $x \in C$ , so muss notwendig  $x \in D$  sein, und es gilt  $Lx = \lambda x$ , so dass  $x$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda$  ist. Dies heißt in anderen Worten: Genau dann ist  $\mu$  ein Eigenwert für den Endomorphismus  $\mathcal{G}$  auf  $C[a, b]$ , wenn  $\mu \neq 0$  und sein Kehrwert  $\lambda = 1/\mu$  ein Eigenwert für  $L$  ist. Außerdem sind die zugehörigen Eigenräume gleich.
- Sei jetzt die zu  $(L, U)$  gehörige EWA selbstadjungiert und normalisiert. Setzt man in (3.2.2)  $u = \mathcal{G}f$  und  $v = \mathcal{G}g$ , so erhält man

$$\langle f, \mathcal{G}g \rangle = \langle \mathcal{G}f, g \rangle \quad \forall f, g \in C. \quad (3.4.2)$$

Diese Eigenschaft wollen wir die *Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{G}$*  nennen. Spezialisiert man die letzte Identität zu  $g = f$ , so folgt

$$\langle f, \mathcal{G}f \rangle = \langle \mathcal{G}f, f \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall f \in C.$$

Beachte, dass die Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{G}$  bedeutet, dass die Funktion  $G(t, \tau) - \overline{G(\tau, t)}$  in  $\mathcal{L}_2([a, b] \times [a, b])$  zu allen Funktionen der Form  $f(t)g(\tau)$  orthogonal ist. Da die Linearkombinationen solcher Funktionen dicht liegen, folgt daraus die Gleichung

$$G(t, \tau) = \overline{G(\tau, t)} \quad \forall t, \tau \in [a, b],$$

und umgekehrt ergibt sich aus dieser Gleichung mit dem Satz von Fubini auch wieder die Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{G}$ .

**Aufgabe 3.4.3** Zeige mit der Hölderschen Ungleichung, dass die Abbildung  $f \mapsto \mathcal{G}f$  zu einem beschränkten linearen Operator auf  $\mathcal{L}_2$  fortgesetzt werden kann. Genauer: Zeige dass für jedes  $f \in \mathcal{L}_2$  das Lebesgue-Integral  $x(t) := \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau$  für alle  $t \in [a, b]$  existiert, und dass gilt

$$\|x\|_2 \leq \|f\|_2 \left( \int_{[a,b]^2} |G(t, \tau)|^2 dt d\tau \right)^{1/2}.$$

Zeige weiter, dass die Bildfunktion  $x$  sogar immer stetig auf  $[a, b]$  ist, obwohl im Fall  $n = 1$  die Greensche Funktion auf der Diagonalen von  $[a, b]^2$  nicht stetig ist. Zeige schließlich noch, dass aus der Dichtheit von  $C[a, b]$  in  $\mathcal{L}_2$  folgt: Wenn (3.4.2) gilt, dann gilt dasselbe sogar für alle  $f, g \in \mathcal{L}_2$ .

**Aufgabe 3.4.4** Zeige: Ist  $f \in \mathcal{L}_2$  und  $g = \mathcal{G} f$ , dann gilt folgende punktweise Abschätzung für  $g$ :

$$|g(t)| \leq \|f\|_2 \left( \int_a^b |G(t, \tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq K \|f\|_2 \quad \forall t \in [a, b],$$

mit  $(b - a)^{-1} K \geq \|G\|_\infty := \sup_{[a, b]^2} |G(t, \tau)|$ .

**Bemerkung 3.4.5** Nach Aufgabe 3.4.3 kann, im Falle eines normalisierten Operators  $L$ , der Greensche Operator  $\mathcal{G}$  auf den Raum  $\mathcal{L}_2$  fortgesetzt werden. Da  $\mathcal{G}$  ein Fredholmscher Integraloperator ist, ist er sogar ein kompakter Endomorphismus auf  $\mathcal{L}_2$ . Also kann die Theorie der kompakten Operatoren auf  $\mathcal{G} : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$  angewandt werden. Hieraus folgt:

- Das Spektrum von  $\mathcal{G}$  ist abzählbar, und höchstens der Nullpunkt ist ein Häufungspunkt.
- Jeder von 0 verschiedene Spektralwert ist ein Eigenwert, und der zugehörige Eigenraum hat immer endliche Dimension.
- Wenn  $\mathcal{G}$  selbstadjungiert ist, ergibt sich aus dem *Entwicklungssatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren*, dass  $\mathcal{G}$  unendlich viele Eigenwerte haben muss, da andernfalls das Bild von  $\mathcal{G}$  endliche Dimension hätte, was nicht sein kann, da der Unterraum  $D$  zum Bild gehört und bereits unendliche Dimension hat.

Weiter folgt aus der gleichen Aufgabe dass alle Eigenfunktionen zu von 0 verschiedenen Eigenwerten von  $\mathcal{G}$  stetig sind, und da  $\mathcal{G}$  stetige Funktionen nach  $D$  abbildet, sind diese Eigenfunktionen sogar  $n$ -mal stetig differenzierbar. Daher kann  $\mathcal{G}$  auf dem Raum  $\mathcal{L}_2$ , mit der möglichen Ausnahme des Nullpunktes, nicht mehr Eigenwerte und Eigenfunktionen haben als in dem kleineren Raum  $C[a, b]$ . Deshalb ergibt sich für jede selbstadjungierte Eigenwertaufgabe die Existenz einer Folge  $(x_j, \lambda_j)_{j=1}^\infty$ , für welche folgendes gilt:

- Die Folge  $(x_j)_{j=1}^\infty$  ist ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{L}_2$ , und alle  $x_j$  sind Eigenfunktionen von  $L$ , also insbesondere in  $D$  enthalten.
- Ist  $\lambda$  irgendein Eigenwert von  $L$ , so gibt es natürliche Zahlen  $n \leq m$  so, dass  $\lambda_n = \dots = \lambda_m = \lambda$  ist, und derart dass die Funktionen  $x_n, \dots, x_m$  eine Basis des Eigenraums von  $L$  zum Eigenwert  $\lambda$  bilden.

Jede solche Folge wollen wir auch kurz charakteristisches System der EWA nennen.

Dass bei einer selbstadjungierten normalisierten Aufgabe der Nullpunkt kein Eigenwert von  $\mathcal{G}$  ist, kann man folgendermaßen zeigen: Wenn für ein  $f \in \mathcal{L}_2$  gilt  $\mathcal{G} f = 0$ , dann folgt

$$\langle g, \mathcal{G} f \rangle = \langle \mathcal{G} g, f \rangle = 0 \quad \forall g \in \mathcal{L}_2.$$

Also ist  $f$  orthogonal zum Bild von  $\mathcal{G}$ , und dieses enthält den dichten Unterraum  $D$ . Daraus folgt aber  $f = 0$ , das heißt genauer  $f$  ist fast überall gleich 0, so dass der Nullpunkt auch im Raum  $\mathcal{L}_2$  kein Eigenwert eines selbstadjungierten normalisierten Operators  $\mathcal{G}$  sein kann.

## 3.5 Die Vollständigkeit der Eigenfunktionen

In diesem Abschnitt sei immer eine selbstadjungierte EWA gegeben. Weiter sei ein charakteristisches System  $(x_j, \lambda_j)_{j=1}^\infty$  mit den in Bemerkung 3.4.5 genannten Eigenschaften fest gewählt.

Wir zeigen jetzt folgenden wichtigen Satz:



**Satz 3.5.1** Die Folge  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  der Eigenfunktionen ist ein vollständiges Orthonormalsystem in  $\mathcal{L}_2$ , und für jedes  $x \in C^{(n)}$ , welches die Randbedingungen erfüllt, gilt sogar

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert.

**Beweis:** Für den Beweis können wir o. B. d. A. annehmen, dass die EWA normalisiert ist. Dann sind alle Eigenwerte  $\lambda_j \neq 0$ , und es ergibt sich aus dem Entwicklungssatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren, angewandt auf  $\mathcal{G}$ , die Darstellung

$$\mathcal{G}f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \langle f, x_j \rangle x_j \quad \forall f \in \mathcal{L}_2, \quad (3.5.1)$$

wobei die Reihe im Sinn der Norm auf  $\mathcal{L}_2$  konvergiert. Wenn  $f \in \mathcal{L}_2$  zu allen  $x_j$  orthogonal ist, folgt hieraus  $\mathcal{G}f = 0$ , und wie oben gezeigt wurde, muss dann  $f = 0$  sein. Daher ist das ONS  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  vollständig. Wir wollen jetzt zeigen, dass die Reihe (3.5.1) wegen der speziellen Form von  $\mathcal{G}$  sogar gleichmäßig konvergent ist. Hierzu seien  $p, q \in \mathbb{N}$  beliebig gegeben. Dann gilt für alle  $t \in [a, b]$  und alle  $f \in \mathcal{L}_2$  wegen Aufgabe 3.4.4:

$$\left| \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda^{-1} \langle f, x_j \rangle x_j(t) \right| = \left| \int_a^b G(t, \tau) \sum_{j=p+1}^{p+q} \langle f, x_j \rangle x_j(\tau) d\tau \right| \leq \left\| \sum_{j=p+1}^{p+q} \langle f, x_j \rangle x_j \right\| K \quad \forall t \in [a, b].$$

wobei  $K$  nicht von  $p, q$  abhängt. Wegen der Parsevalschen Gleichung gilt aber

$$\left\| \sum_{j=p+1}^{p+q} \langle f, x_j \rangle x_j \right\|^2 = \sum_{j=p+1}^{p+q} |\langle f, x_j \rangle|^2,$$

und die Besselsche Ungleichung besagt  $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, x_j \rangle|^2 < \infty$ . Daher ist die Reihe (3.5.1) in der Tat gleichmäßig konvergent auf  $[a, b]$ . Wenn  $x \in D$  ist, gibt es ein (eindeutig bestimmtes)  $f \in C$  mit  $x = \mathcal{G}f$ . Da

$$\langle x, x_j \rangle = \langle \mathcal{G}f, x_j \rangle = \langle f, \mathcal{G}x_j \rangle = \lambda_j^{-1} \langle f, x_j \rangle \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

ist, folgt hieraus die Behauptung.  $\square$

### 3.6 Probleme mit Gewichtsfunktion

Im Folgenden sei eine normalisierte und selbstadjungierte EWA (3.2.1) gegeben, und  $\mathcal{G}$  bzw.  $G(t, \tau)$  seien wieder der/die zugehörige Greensche Operator bzw. Funktion. In vielen Anwendungen treten an Stelle von (3.2.1) jedoch Probleme auf, welche eine *Gewichtsfunktion*  $\rho \in C$  enthalten und von der Gestalt

$$Lx = \lambda \rho(t) x, \quad Ux = 0 \quad (3.6.1)$$

sind. Wir wollen auch in diesem Fall  $\lambda$  einen Eigenwert nennen, wenn (3.6.1) eine nicht triviale Lösung besitzt, und jede solche Lösung soll wieder zugehörige Eigenfunktion heißen. Wir nehmen für den Moment nur an, dass  $\rho(t)$  auf  $[a, b]$  nicht negativ ist, und setzen  $r(t) = \sqrt{\rho(t)}$ . Mit Hilfe der Greenschen Funktion zum Operator  $L$  definieren wir einen neuen Operator  $\mathcal{H}$  auf  $\mathcal{L}_2$  durch

$$(\mathcal{H}f)(t) = r(t) \int_a^b G(t, \tau) r(\tau) f(\tau) d\tau \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.6.2)$$

Wenn man die Multiplikation eines  $f \in \mathcal{L}_2$  mit der Funktion  $r$  als Multiplikationsoperator auffasst und mit  $\mathbf{r}$  bezeichnet, kann man auch kurz schreiben  $\mathcal{H} = \mathbf{r} \circ \mathcal{G} \circ \mathbf{r}$ . Es ist nicht schwer einzusehen, dass  $\mathcal{H}$  auf  $\mathcal{L}_2$  kompakt und selbstadjungiert ist. Damit  $\mathcal{H}$  unendlich viele Eigenwerte hat, und damit jedes charakteristische System ein vollständiges ONS ist, ist entscheidend, dass wir folgende zusätzliche Voraussetzung treffen:

(V) Sei die Gewichtsfunktion so, dass das Bild von  $\mathcal{H}$  ein dichter Unterraum von  $\mathcal{L}_2$  ist.

In allen Anwendungen hat  $\rho$  nur endlich viele Nullstellen auf  $[a, b]$ , und in all diesen Fällen ist die obige Voraussetzung erfüllt. Umgekehrt ist dies nicht der Fall, wenn die Nullstellenmenge von  $\rho$  ein positives Lebesguemaß hat.

Unter den getroffenen Voraussetzungen folgt genau wie im letzten Abschnitt dass  $\mathcal{H}$  unendlich viele Eigenwerte hat, die alle reell sind und von denen keiner verschwindet, dass die zugehörigen Eigenräume endliche Dimension haben, und dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. Was wir jetzt sehen wollen ist, wie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}$  mit denen von (3.6.1) zusammenhängen:

Sei  $\mu$  ein beliebiger Eigenwert von  $\mathcal{H}$  (also insbesondere  $\mu \neq 0$ ), und sei  $\tilde{x}$  eine zugehörige Eigenfunktion. Wir definieren  $x$  so, dass  $\tilde{x} = r x$  ist, wobei wir zunächst offen lassen, wie wir  $x(t)$  an den Nullstellen von  $r(t)$  setzen wollen. Jedenfalls folgt dann für alle anderen  $t \in [a, b]$  aus der Gleichung  $\mu \tilde{x} = \mathcal{H} \tilde{x}$  mit der Definition von  $\mathcal{H}$  die Beziehung

$$\mu x(t) = \int_a^b G(t, \tau) \rho(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Die Nullstellen von  $r$  sind eine Lebesguesche Nullmenge (sonst wäre unsere Voraussetzung (V) verletzt), und daher können wir an diesen Stellen  $x(t)$  so definieren, dass diese Gleichung sogar immer gilt. Dann ist aber  $x \in D$ , und es folgt die Gleichung  $Lx = \lambda \rho x$ , mit  $\lambda = 1/\mu$ . Da die Eigenfunktion  $\tilde{x}$  von  $\mathcal{H}$  ohnehin nur fast überall definiert ist, sehen wir dass wir alle Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}$  immer in der Form  $r x$  mit  $x \in D$  schreiben können, und daher bildet der Multiplikationsoperator  $\mathbf{r}$  den Eigenraum von (3.6.1) zu einem Eigenwert  $\lambda$  bijektiv auf den Eigenraum von  $\mathcal{H}$  zum Eigenwert  $\mu = 1/\lambda$  ab! Die Orthogonalität von Eigenfunktionen von  $\mathcal{H}$  ist dann äquivalent zu der von Eigenfunktionen von (3.6.1), allerdings bezüglich eines *gewichteten Skalarproduktes*, nämlich

$$\langle x, y \rangle_\rho = \int_a^b \rho(t) x(t) \overline{y(t)} dt. \quad (3.6.3)$$

Zu diesem Skalarprodukt, bzw. der entsprechenden Norm, die wir mit  $\|\cdot\|_{2,\rho}$  bezeichnen wollen, erhalten wir einen zugehörigen Raum  $\mathcal{L}_2(\rho)$  als Menge aller messbaren Funktionen mit endlicher  $\|\cdot\|_{2,\rho}$ -Norm. Daneben betrachten wir auch noch eine "gewichtete  $\infty$ -Norm"

$$\|f\|_{\infty,\rho} := \sup_{t \in [a,b]} |r(t) \rho(t)|.$$

Auf Grund dieser Beobachtungen ergibt sich auch für die EWA mit Gewichtsfunktion (3.6.1) die Existenz einer Folge  $(x_j, \lambda_j)_{j=1}^\infty$ , wobei jedes  $x_j$  eine Eigenfunktion von (3.6.1) zum Eigenwert  $\lambda_j$  ist, und die Folge  $(x_j)_{j=1}^\infty$  ist ein vollständiges ONS in  $\mathcal{L}_2(\rho)$ . Mit denselben Abschätzungen wie im Beweis von Satz 3.5.1 zeigt man dass die Reihe

$$\mathcal{H} f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-1} \langle f, \tilde{x}_j \rangle \tilde{x}_j = \sum_{j=1}^\infty \langle \mathcal{H} f, \tilde{x}_j \rangle \tilde{x}_j,$$

mit  $\tilde{x}_j = \mathbf{r} x_j$  gleichmäßig auf  $[a, b]$  konvergiert. Wenn man  $\mathbf{r} f = g$  setzt, ist dies äquivalent mit der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$r \mathcal{G} g = \sum_{j=1}^\infty \langle \mathcal{G} g, x_j \rangle_\rho r x_j,$$

und da  $\mathcal{G}$  ja den Raum  $C$  auf  $D$  abbildet, folgt für jedes  $x \in C^{(n)}$ , welches die Randbedingungen erfüllt, die Darstellung

$$r(t) x(t) = \sum_{j=1}^\infty \langle x, x_j \rangle_\rho r(t) x_j(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Reihe

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle_{\rho} x_j(t)$$

in der oben definierten gewichteten  $\infty$ -Norm  $\|\cdot\|_{\infty, \rho}$  konvergiert. Beachte hierbei, dass die (punktweise) Konvergenz dieser Reihe an den Nullstellen von  $r$  nicht gesichert ist, dass diese Definitionslücken aber keine Rolle spielen, da die Grenzfunktion ja stetig ist.

### 3.7 Singuläre Randwertprobleme

Wenn man die bisherigen Ergebnisse genauer analysiert, so stellt man fest, dass die Rolle der Nebenbedingungen im Wesentlichen darin besteht, einen Unterraum  $D$  von  $C^{(n)}$  festzulegen, auf welchem dann der Operator  $L$  im Idealfall selbstadjungiert ist. In vielen wichtigen Anwendungen sind die Koeffizienten von  $L$  lediglich auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  definiert und stetig, und/oder der Koeffizient der höchsten Ableitung ist nur dort von 0 verschieden, so dass Lösungen im Allgemeinen nicht in den Randpunkten definiert sein werden. In diesen Fällen muss also an Stelle der Randbedingungen auf andere Weise festgelegt werden, wie  $D$  aussieht. Z. B. kann die entsprechende Randwertaufgabe so interpretiert werden, dass man Lösungen  $x$  sucht, die für  $t \rightarrow a + 0$  und  $t \rightarrow b - 0$  Grenzwerte besitzen, für welche dann die Randbedingungen gelten. Diese Interpretation ist auch sinnvoll, wenn  $a = -\infty$  und/oder  $b = \infty$  ist. Gelegentlich betrachtet man auch noch allgemeinere Randbedingungen, bei denen die Lösungen an einem oder beiden Randpunkten wenigstens noch beschränkt sein sollen. Wir wollen solche *singulären Randwertprobleme* hier nicht allgemein studieren und verweisen auf die einschlägige Literatur, etwa auf das Buch von *Coddington und Levinson* [6]. Beispiele hierzu finden sich auch im folgenden Abschnitt.

### 3.8 Weitere Beispiele

Wir betrachten folgende Beispiele, die in Anwendungen auf physikalische Probleme wichtig sind:

1. Etwas allgemeiner als in (3.1.1) betrachten wir die selbstadjungierte EWA

$$-m x'' = \lambda x, \quad x(0) = x(\ell) = 0.$$

Hierbei ist  $m > 0$  die Masse eines schwingenden Systems, und  $\ell > 0$  hat die Bedeutung einer Länge. Um zu verstehen, was diese Aufgabe mit dem Schwingen einer Saite zu tun hat, muss man eigentlich die Variable  $t$  in  $s$  umbenennen und als eine Ortsvariable auffassen. Eine Lösung beschreibt dann bis auf einen zeitabhängigen Faktor die "Momentaufnahme" der Saite zu einem beliebigen Zeitpunkt.

Wie am Anfang dieses Kapitels rechnet man nach, dass die Eigenwerte für diese EWA die Zahlen  $\lambda_k = m(k\pi/\ell)^2$  mit  $k \in \mathbb{N}$  sind. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind, bis auf einen Normierungsfaktor, gleich  $x_k(t) = \sin(k\pi t/\ell)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Also sind die Eigenfunktionen, im Gegensatz zu den Eigenwerten, von  $m$  unabhängig! Aus Satz 3.5.1 ergibt sich die Vollständigkeit des OGS  $(\sin(k\pi t/\ell))_{k=1}^{\infty}$  in  $\mathcal{L}_2(0, \ell)$ .

2. Wir betrachten nun das leicht veränderte Problem

$$-m x'' = \lambda x, \quad x'(0) = x'(\ell) = 0.$$

Dies ist eine selbstadjungierte, aber nicht normalisierte Sturm-Liouvillesche EWA, und man rechnet nach, dass die Eigenwerte die Zahlen  $\lambda_k = m(k\pi/\ell)^2$  sind, wobei jetzt allerdings auch  $k = 0$  sein kann. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind dann, abgesehen von der Normierung, gleich  $x_k(t) = \cos(k\pi t/\ell)$ . Auch dieses System ist vollständig in  $\mathcal{L}_2(0, \ell)$ .

3. Wenn man in den ersten beiden Problemen  $\ell = \pi$  setzt, erhält man die Vollständigkeit der Systeme  $(\sin(kt))_{k=1}^{\infty}$  sowie  $(\cos(kt))_{k=0}^{\infty}$  auf dem Intervall  $[0, \pi]$ . Da die Sinusfunktionen ungerade und die Kosinusfunktionen gerade sind, kann man jede ungerade Funktion aus  $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$  durch eine Reihe mit Sinusfunktionen darstellen, und jede gerade Funktion lässt sich in eine Reihe mit Kosinusfunktionen entwickeln. Daraus ergibt sich die Vollständigkeit des sogenannten trigonometrischen OGS in  $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ , denn dieser Raum ist die orthogonale Summe der Unterräume aus den geraden bzw. ungeraden Funktionen.
4. Sei jetzt das Problem

$$-x'' = \lambda x, \quad x(-\pi) = x(\pi), \quad x'(-\pi) = x'(\pi)$$

betrachtet, welches ebenfalls selbstadjungiert ist. Jetzt ist  $\lambda = 0$  Eigenwert, und  $x(t) \equiv 1$  ist zugehörige Eigenfunktion. Die anderen Eigenwerte sind gleich  $\lambda_k = k^2$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , und hier gibt es immer zwei linear unabhängige Eigenfunktionen, nämlich  $x_{k,1}(t) = \cos(kt)$  und  $x_{k,2}(t) = \sin(kt)$ . Dies zeigt erneut die Vollständigkeit des trigonometrischen Systems in  $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ .

5. Als Beispiel für singuläre EWA betrachten wir die Gleichung

$$Lx := ((1-t^2)x')' = \lambda x, \quad -1 < t < 1.$$

Hier ist der Koeffizient der zweiten Ableitung nur auf dem offenen Intervall positiv, und daher können Lösungen der Eigenwertgleichung  $Lx = \lambda x$  unbeschränkt sein, wenn  $t \rightarrow \pm 1$  geht. Wenn wir aber an Stelle der üblichen Randbedingungen den Definitionsbereich  $D$  von  $L$  als die Menge aller auf  $(-1, 1)$  beschränkten und zweimal stetig differenzierbaren Funktionen festlegen, dann ist  $L$  auf  $D$  selbstadjungiert, und daher sind auch hier alle Eigenwerte reell, und Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind immer orthogonal. Nach Satz 1.4.3 sind alle Lösungen der EWA im Einheitskreis holomorph und können also durch einen *Potenzreihenansatz*  $x(t) = \sum x_n t^n$  bestimmt werden. Setzt man in die Gleichung ein, so führt der Koeffizientenvergleich auf die Rekursionsformel

$$x_{n+2} = \frac{n(n+1) + \lambda}{(n+1)(n+2)} x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Die ersten beiden Koeffizienten  $x_0, x_1$  können dabei beliebig vorgegeben werden, während alle weiteren  $x_n$  eindeutig bestimmt sind. Für die Zahlen  $\lambda_m = -m(m+1)$  sehen wir, dass wir immer ein Polynom  $m$ -ten Grades als Lösung bekommen, da wir bei geradem, bzw. ungeradem  $m$  mit  $x_0 = 1, x_1 = 0$  bzw. mit  $x_0 = 0, x_1 = 1$  beginnen können. Da Polynome natürlich bei  $t = \pm 1$  beschränkt sind, sind also alle diese Zahlen Eigenwerte. Die zugehörigen polynomialen Eigenfunktionen heißen *Legendresche Polynome*. Da ein solches Orthogonalsystem von Polynomen immer vollständig ist, folgt dass es keine weiteren Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen mehr geben kann!

6. Analog zum letzten Beispiel betrachten wir noch zwei weitere Fälle singulärer EWA: Das Problem (mit einer Gewichtsfunktion)

$$((1-t^2)^{1/2} x')' = \lambda (1-t^2)^{-1/2} x$$

hat für alle  $\lambda_n = -n^2$  ein Polynom  $n$ -ten Grades als Lösung. Diese Polynome sind die äußerst wichtigen *Tschebyscheff*-Polynome, die neben ihrer Orthogonalität (bzgl. des gewichteten Skalarproduktes (3.6.3) mit der singulären Gewichtsfunktion  $\rho = (1-t^2)^{-1/2}$ ) weitere sehr bemerkenswerte Eigenschaften haben! Ein weiteres wichtiges Orthogonalsystem von Polynomen ist Lösung der EWA

$$(\exp(-t^2/2) x')' = \lambda \exp(-t^2/2) x$$

auf dem (unendlich langen) offenen Intervall  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ . Hier sind die Eigenwerte  $\lambda_n = -n$ , und die zugehörigen Polynome sind nach *Hermite* benannt. In den beiden hier betrachteten Fällen wollen wir nicht genau untersuchen, ob es außer den angegebenen polynomialen Eigenfunktionen noch weitere gibt – beachte dass es nicht unmittelbar klar ist, ob auch in  $\mathcal{L}_2(\rho)$  mit den beiden angegebenen Gewichtsfunktionen der Unterraum der Polynome dicht liegt.

# Kapitel 4

## Lineare Differentialgleichungen in der komplexen Ebene

In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob und wie explizit man Lösungen von linearen Differentialgleichungssystemen durch sogenannte *Potenzreihenansätze* berechnen kann. Dabei betrachten wir immer ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem

$$x' = A(z)x, \quad z \in G, \quad (4.0.1)$$

mit einer  $n \times n$ -Matrix  $A(z)$ , deren Elemente holomorphe Funktionen in  $G$  sind. Am Ende von Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, dass zu beliebigen Anfangsdaten  $(z_0, x_0)$  mit  $z_0 \in G$  und  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  immer eine eindeutig bestimmte Lösung  $x(z)$  mit  $x(z_0) = x_0$  existiert, welche (mindestens) in der größten offenen Kreisscheibe um  $z_0$ , die noch ganz zu  $G$  gehört, holomorph ist, und die grundsätzlich durch einen Potenzreihenansatz berechnet werden kann, wobei „grundsätzlich“ heißen soll, dass man für die Koeffizienten der Potenzreihe von  $x(z)$  eine Rekursionsformel erhält, in die die Koeffizienten der Entwicklung von  $A(z)$  eingehen. Meistens ist aber wichtig zu wissen, ob sich die Lösung in das ganze Gebiet fortsetzen lässt, und wie sich diese Lösung verhält, wenn die Variable  $z$  gegen einen Randpunkt des Gebietes strebt. Dies soll jetzt untersucht werden.

### 4.1 Analytische Fortsetzung von Lösungen

Der Begriff der analytischen Fortsetzung hat zunächst nichts mit Lösungen von Differentialgleichungen zu tun – wir werden aber sehen, dass man solche immer fortsetzen kann.

**Definition 4.1.1 (Fortsetzbarkeit)** *Gegeben sei eine holomorphe Funktion  $x(z)$ , für  $z$  in einer Kreisscheibe  $U_0 = K(z_0, r) \subset G$ , sowie eine Kurve  $\gamma$  in  $G$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Parameterdarstellung  $z(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Wir sagen, dass sich  $x(z)$  entlang  $\gamma$  (analytisch) fortsetzen lässt, wenn es eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$  sowie Radien  $r_0 = r, \dots, r_N > 0$  gibt, so dass folgendes gilt:*

- (a) *Der Träger von  $\gamma$  wird von den Kreisscheiben  $U_j := K(z(t_j), r_j)$ ,  $0 \leq j \leq N$ , überdeckt, und alle diese Kreisscheiben liegen in  $G$ .*
- (b) *Für jedes  $j = 0, \dots, N-1$  ist  $z(t_{j+1}) \in U_j$ , also insbesondere ist  $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$ .*
- (c) *Für jedes  $j = 0, \dots, N$  gibt es eine Funktion  $x(z; j)$ , die in  $U_j$  holomorph ist, mit  $x(z; 0) = x(z)$  in  $U_0$  und  $x(z; j+1) = x(z; j)$  in  $U_j \cap U_{j+1}$  für alle  $j = 0, \dots, N-1$ .*

**Bemerkung 4.1.2** Seien  $x(z)$  und  $\gamma$  wie oben. Wenn  $x(z)$  bereits in einem Gebiet  $G_\gamma$  mit  $\gamma^* \subset G_\gamma$  holomorph ist, dann ist diese Funktion entlang  $\gamma$  fortsetzbar. Wenn umgekehrt  $x(z)$  entlang  $\gamma$  fortsetzbar ist, und wenn die Kurve  $\gamma$  doppeltpunktfrei und nicht geschlossen ist, dann ist  $G_\gamma := U_0 \cup \dots \cup U_N$  ein Teilgebiet  $G_\gamma \subset G$ , welches den Träger  $\gamma^*$  von  $\gamma$  enthält, und in welchem es eine holomorphe Funktion gibt, die wir der Einfachheit halber wieder mit  $x(z)$  bezeichnen, so dass  $x(z) = x(z; j)$  für  $z \in G_\gamma \cap U_j$  ist, für alle  $j = 0, \dots, N$ . Beachte aber, dass im Allgemeinen dies nicht so sein muss – siehe dazu das unten stehende Beispiel.

Wenn  $x(z)$  entlang  $\gamma$  fortsetzbar ist, dann kann man prinzipiell die Fortsetzung durch das sogenannte Kreiskettenverfahren berechnen. Vergleiche hierzu Aufgabe 4.1.4.

Wenn  $x(z)$  eine Lösung von (4.0.1) ist, folgt aus dem Nullstellensatz für holomorphe Funktionen, dass alle  $x(z; j)$  für  $z \in U_j$  Lösungen von (4.0.1) sind, da ja  $x'(z; 0) - A(z)x(z; 0) = 0$  in  $U_0$  ist, und daraus folgt mit (c) induktiv  $x'(z; j) - A(z)x(z; j) = 0$  in  $U_j$  für  $j = 1, \dots, N$ .

**Beispiel 4.1.3** Sei  $n = 2$ . Das System  $x'_1 = 0$ ,  $x'_2 = z^{-1}x_1$  in  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  hat die Lösung  $x(z) = (1, \log z)^T$ . Wenn  $\gamma$  der positiv orientierte Einheitskreis mit Anfangs- und Endpunkt 1 ist, dann lässt sich diese Lösung, bei beliebiger Wahl von  $\log 1$ , entlang  $\gamma$  analytisch fortsetzen, aber der Wert der Lösung am Endpunkt stimmt nicht mit dem am Anfangspunkt überein. Daher ist es nicht möglich, ein Gebiet  $G_\gamma \subset G$  so zu bestimmen, dass  $\gamma^* \subset G_\gamma$  ist und in welchem  $x(z)$  holomorph ist.

**Aufgabe 4.1.4 (Kreiskettenverfahren)** Mit den Bezeichnungen aus Definition 4.1.1 sei  $x(z)$  entlang  $\gamma$  fortsetzbar. Dann kann man  $x(z)$  um  $z_0$  in seine Potenzreihe entwickeln, und diese konvergiert mindestens in  $U_0$ . Zeige: Aus dieser Potenzreihe kann man prinzipiell alle Potenzreihen der Funktionen  $x(z; j)$  um den Entwicklungspunkt  $z(t_j)$  bestimmen.

**Satz 4.1.5** Sei  $x(z)$  eine Lösung von (4.0.1), für  $z$  in einer Kreisscheibe  $U_0 = K(z_0, r) \subset G$ . Dann lässt sich  $x(z)$  entlang jeder Kurve  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und  $\gamma^* \in G$  holomorph fortsetzen.

**Beweis:** Der Träger  $\gamma^*$  ist eine kompakte Teilmenge von  $G$ , und daher existiert ein  $r_0 > 0$  so, dass für jedes  $z \in \gamma^*$  gilt  $K(z, r_0) \subset G$ . Sei o. B. d. A.  $r_0 \leq r$  angenommen, so dass  $x(z)$  in  $U_0 := K(z_0, r_0)$  holomorph ist. Falls  $\gamma^* \subset U_0$  ist, ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall sei  $z(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , eine Parameterdarstellung von  $\gamma$ . Dann ist  $z(t)$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig, und daher existiert ein  $\delta > 0$  so, dass aus  $|t - \tau| < \delta$  stets  $|z(t) - z(\tau)| < r_0/2$  folgt. Sei jetzt  $t_1 := \inf\{t \in (0, 1] : z(t) \notin K(z_0, r_0/2)\}$ . Dann folgt für  $z_1 := z(t_1)$  dass  $|z_1 - z_0| = r_0/2$  ist. Also ist  $z_1 \in U_0$ , und  $t_1 \geq \delta$ . In  $U_1 := K(z(t_1), r_0)$  gibt es wegen Abschnitt 1.4 genau eine Lösung  $x(z; 1)$  von (4.0.1) mit  $x(z_1; 1) = x(z_1)$ , und wegen der Eindeutigkeit solcher Lösungen folgt  $x(z; 1) = x(z)$  in  $U_0 \cap U_1$ . Falls  $\gamma^* \subset U_0 \cup U_1$  ist, sind wir fertig. Andernfalls sei  $t_2 := \inf\{t \in (t_1, 1] : z(t) \notin K(z_1, r_0/2)\} > t_1$ , und dann folgt für  $z_2 := z(t_2)$  wie oben dass  $|z_2 - z_1| = r_0/2$  ist. Also ist  $z_2 \in U_1$ , und  $t_2 \geq t_1 + \delta$ . In  $U_2 := K(z(t_2), r/2)$  gibt es genau eine Lösung  $x(z; 2)$  von (4.0.1) mit  $x(z_2; 2) = x(z_2; 1)$ , und es folgt  $x(z; 2) = x(z; 1)$  in  $U_1 \cap U_2$ . Setzt man diese Überlegung fort, folgt nach endlich vielen Schritten die Behauptung, da dann der Fall  $\gamma^* \subset U_0 \cup \dots \cup U_N$  eintreten muss.  $\square$

Einerseits lassen sich nach dem vorangegangenen Satz Lösungen von (4.0.1) entlang beliebiger Kurven fortsetzen, andererseits kann diese Fortsetzung, wie im obigen Beispiel, von der Wahl der Kurve und nicht nur von deren Endpunkt abhängen. Daher kann man im Allgemeinen nicht davon ausgehen, dass jede Lösung  $x(z)$  von (4.0.1) in dem ganzen Gebiet  $G$  holomorph ist. Dies ist aber richtig, wenn  $G$  einfach zusammenhängend ist, was sich aus dem nächsten Satz ergeben wird. Dazu benutzen wir folgende

**Definition 4.1.6 (Homotope Kurven)** Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  Kurven in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ . Wir nennen  $\gamma_1, \gamma_2$  zueinander homotop, falls es eine auf dem Quadrat  $[0, 1]^2$  stetige Funktion  $z(t, s)$  mit Werten in  $G$  gibt, so dass  $z(t, 0)$  bzw.  $z(t, 1)$  Parameterdarstellung von  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  ist, und dass  $z(0, s) \equiv z_0$  und  $z(1, s) \equiv$

$z_1$  ist, für alle  $s \in [0, 1]$ . Offenbar haben homotope Kurven also immer einen gemeinsamen Anfangs- bzw. Endpunkt, nämlich  $z_0$  bzw.  $z_1$ . Ein Gebiet  $G$ , in welchem zwei Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt immer homotop sind, heißt einfach zusammenhängend.

**Aufgabe 4.1.7** Zeige dass  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  nicht einfach zusammenhängend ist.

**Satz 4.1.8 (Monodromiesatz)** Sei  $x(z)$  eine in  $U_0 = K(z_0, r) \subset G$  definierte Lösung von (4.0.1), und seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei zueinander homotope Kurven in  $G$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ . Wenn wir mit  $x_1(z)$  bzw.  $x_2(z)$  die analytischen Fortsetzungen von  $x(z)$  entlang  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  bezeichnen, dann ist  $x_1(z_1) = x_2(z_1)$ .

**Beweis:** Wenn  $z(t, s)$  die in der Homotopie-Definition genannten Eigenschaften hat, dann ist die Bildmenge dieser Funktion kompakt in  $G$ , und daher gibt es ein  $r_0 > 0$  so, dass  $U_{t,s} := K(z(t, s), r_0) \subset G$  ist für alle  $s, t \in [0, 1]$ . Außerdem gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $z(t, s)$  ein  $\delta > 0$  derart, dass aus  $|t - \tau| + |s - \sigma| < \delta$  folgt dass  $|z(t, s) - z(\tau, \sigma)| < r_0$  ist. Für (festes)  $s_0 \in [0, 1]$  sei  $\gamma(s_0)$  die Kurve in  $G$  mit Parameterdarstellung  $x(t, s_0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , also ist  $\gamma(0) = \gamma_1$  und  $\gamma(1) = \gamma_2$ . Wegen Satz 4.1.5 kann  $x(z)$  entlang  $\gamma(s_0)$  bis zum Punkt  $z_1$  fortgesetzt werden, und daraus folgt dass es zu jedem  $t \in [0, 1]$  eine Funktion  $x(z; t, s_0)$  gibt, welche in  $U_{t,s_0}$  holomorph ist, und für die gilt: Für  $0 \leq t \leq \tau < t + \delta$  gilt  $x(z; t, s_0) = x(z; \tau, s_0)$  in  $U_{t,s_0} \cap U_{\tau,s_0}$ . Sei jetzt  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \cap [0, 1]$ . Dann wird der Träger von  $\gamma(s)$  von den Kugeln  $U_{t,s_0}$  überdeckt, und hieraus folgt dass  $x(z; t, s) = x(z; t, s_0)$  in  $U_{t,s} \cap U_{t,s_0}$  ist, für alle  $t \in [0, 1]$ . Das bedeutet dass  $x(z; 1, s)$  für die betrachteten Werte von  $s$  und  $z \in U_{1,s}$  nicht von  $s$  abhängen kann, und da  $s_0$  beliebig aus  $[0, 1]$  gewählt war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 4.1.9** Der letzte Satz gilt allgemeiner für eine beliebige Funktion  $x(z)$ , welche in  $U_0 = K(z_0, r) \subset G$  holomorph und entlang jeder Kurve in  $G$  fortsetzbar ist. Vergleiche hierzu das Buch von L. V. Ahlfors [1]. Beachte, dass die Aussage des Satzes im Allgemeinen falsch wird, wenn die beiden Kurven nicht zueinander homotop sind.

**Korollar zu Satz 4.1.8** Wenn das Gebiet  $G$  einfach zusammenhängend ist, ist jede Lösung von (4.0.1) in ganz  $G$  holomorph.

## 4.2 Singuläre Punkte

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass es einen Punkt  $z_0 \notin G$  gibt, derart dass für hinreichend kleines  $\rho > 0$  gilt  $U'_\rho(z_0) := \{z : 0 < |z - z_0| < \rho\} \subset G$ . Wir wollen auch  $z_0 = \infty$  zulassen, und in diesem Fall soll es ein  $R > 0$  geben, so dass  $\{|z| > R\} \subset G$  ist. In beiden Fällen ist also  $z_0$  eine isolierte Singularität der Koeffizientenmatrix  $A(z)$ .

**Aufgabe 4.2.1** Sei  $0 \notin G$ , sei  $w = 1/z$ , und sei  $z_0 = \infty$  isolierte Singularität von  $A(z)$ . Zeige: Genau dann ist  $x(z)$  eine Lösung von (4.0.1), wenn der Vektor  $\tilde{x}(w) = x(1/w)$  eine Lösung des Systems

$$\tilde{x}' := \frac{d}{dw} \tilde{x} = \tilde{A}(w) \tilde{x}, \quad \tilde{A}(w) = -w^{-2} A(1/w) \quad (4.2.1)$$

ist. Wenn  $A(z)$  sich bei  $z = \infty$  wie  $z^r$  verhält, dann verhält sich also  $\tilde{A}(w)$  bei  $w = 0$  wie  $w^{-r-1}$ . Diese Tatsache erklärt die unten folgende Definition des Poincaréschen Ranges eines singulären Punktes.

**Definition 4.2.2** Sei  $z_0$  eine endliche isolierte Singularität von  $A(z)$ , sei  $\rho > 0$  wie oben, und sei  $X(z)$  ein Fundamentalsystem von (4.0.1), für  $z$  in einer kleinen Kreisscheibe  $U := K(z_1, \rho_1)$ , mit  $\rho_1 > 0$

und  $0 < r_1 := |z_1 - z_0| < \rho$ . Dann kann man  $X(z)$  entlang des positiv orientierten Kreises um  $z_0$  mit Radius  $r_1$  analytisch fortsetzen, und die am Endpunkt der Kreises erhaltene Matrix soll mit  $X(z; 1)$  bezeichnet sein. Wegen der Wronski-Identität ist auch  $X(z; 1)$  noch immer ein Fundamentalsystem von (4.0.1), aber einfache Beispiele zeigen, dass i. A.  $X(z; 1) \neq X(z)$  ist. In jedem Fall gibt es aber eine konstante invertierbare Matrix  $C$ , für welche  $X(z; 1) = X(z)C$  ist. Da 0 kein Eigenwert von  $C$  ist, gibt es eine weitere Matrix  $M := (2\pi i)^{-1} \log C$ , und wir nennen  $M$  auch Monodromiematrix. Entsprechend definieren wir diesen Begriff auch im Fall  $z_0 = \infty$ .

**Bemerkung 4.2.3** Wenn  $M$  eine Monodromiematrix eines Fundamentalsystems  $X(z)$  ist, setzen wir

$$z^M = e^{\log z M} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wenn man diese Matrix, für einen fest gewählten Zweig von  $\log z = \log |z| + i \arg z$ , entlang eines positiv orientierten Kreises um 0 fortsetzt, erhöht sich der Wert von  $\arg z$  um  $2\pi$ , und wir erhalten daher am Endpunkt als neuen Funktionszweig die Matrix  $z^M e^{2\pi i M} = z^M C$ . Daraus folgt, dass sich die Matrix  $S(z) = X(z)(z - z_0)^{-M}$  bei Fortsetzung um  $z_0$  herum nicht ändert. Anders ausgedrückt heißt das, dass  $S(z)$  im Punkt  $z_0$  eine isolierte Singularität hat, und sich deshalb in eine Laurentreihe entwickeln lässt. Wir erhalten also eine Darstellung

$$X(z) = \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} (z - z_0)^j S_j \right) (z - z_0)^M \quad (0 < |z - z_0| < \rho),$$

aber die Matrix  $M$  und die Koeffizienten  $S_j$  der Laurentreihe sind nicht direkt berechenbar. Außerdem bietet diese Darstellungsformel im Allgemeinen keine Möglichkeit, das Verhalten von  $X(z)$  bzw.  $S(z)$  für  $z \rightarrow z_0$  zu studieren.

**Aufgabe 4.2.4** Seien  $X(z)$ ,  $M$ ,  $S(z)$  wie in der letzten Bemerkung. Zeige

$$S'(z) = A(z)S(z) - (z - z_0)^{-1}S(z)M \quad (0 < |z - z_0| < \rho).$$

Das bedeutet, dass die Matrix  $S(z)$  ein lineares Dgls der Dimension  $n^2$  löst.

Wir wollen bei unseren weiteren Untersuchungen den Fall, dass wenigstens ein Element von  $A(z)$  im Punkt  $z_0$  eine wesentliche Singularität hat, nicht betrachten, da über solche Systeme relativ wenig bekannt ist, und da sie auch in den Anwendungen selten vorkommen!

**Definition 4.2.5 (Poincaré-Rang)** Falls  $z_0 \in \mathbb{C}$  keine wesentliche Singularität von  $A(z) = [a_{jk}(z)]$  ist, d. h. genauer, falls alle Elemente  $a_{jk}(z)$  in  $z_0$  höchstens eine Polstelle haben, dann nennen wir  $z_0$  einen singulären Punkt des Dgls (4.0.1). Die kleinste nicht-negative Zahl  $r$ , für welche alle  $a_{jk}(z)$  in  $z_0$  Pole höchstens der Ordnung  $r + 1$  haben, heißt dann der Poincarésche Rang des singulären Punktes. Offenbar ist dann  $r \in \mathbb{N}_0$ . Falls  $r = 0$  ist, dann sprechen wir auch von einer Singularität erster Art, und in jedem anderen Fall heißt die Stelle Singularität zweiter Art. Wenn alle Lösungen von (4.0.1) höchstens so schnell wie eine Potenz von  $(z - z_0)^{-1}$  anwachsen, wenn  $z \rightarrow z_0$  strebt und  $\arg(z - z_0)$  beschränkt bleibt, dann nennt man  $z_0$  einen regulär-singulären Punkt oder eine reguläre Singularität. Wenn  $\{|z| > R\} \subset G$  für hinreichend großes  $R > 0$  ist, dann nennen wir  $z_0 = \infty$  eine Singularität erster bzw. zweiter Art bzw. eine reguläre Singularität, falls der Nullpunkt eine entsprechende Singularität für das System (4.2.1) ist. Falls  $A(z)$  eine rationale Funktion ist, und falls alle Polstellen sowie auch  $\infty$  Singularitäten erster Art sind, dann heißt (4.0.1) ein Fuchssches System.

**Aufgabe 4.2.6** Zeige dass  $z_0 = \infty$  genau dann eine Singularität erster Art von (4.0.1) ist, wenn sich  $A(z)$  außerhalb einer großen Kreisscheibe um den Nullpunkt in eine Laurentreihe entwickeln lässt, welche nur negative Potenzen von  $z$  enthält. Dies ist äquivalent dazu, dass  $A(z)$  außerhalb dieser Kreisscheibe



holomorph ist und gegen 0 konvergiert, wenn  $z \rightarrow \infty$  geht. Verwende dies um zu zeigen, dass (4.0.1) genau dann ein Fuchssches System ist, wenn

$$A(z) = \sum_{j=1}^m (z - z_j)^{-1} A_j$$

ist, mit verschiedenen Zahlen  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  und beliebigen  $n$ -reihigen quadratischen Matrizen  $A_j$ . Überlege, warum es sinnvoll ist, den Punkt  $z = \infty$  einen regulären, d. h., einen nicht-singulären, Punkt eines Fuchsschen Systems zu nennen, falls gilt  $A_1 + \dots + A_m = 0$ .

**Aufgabe 4.2.7** Zeige: Zu jedem regulär-singulären Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  von (4.0.1) gibt es mindestens einen Lösungsvektor der Form

$$x(z) = s(z)(z - z_0)^\mu,$$

mit einer Zahl  $\mu \in \mathbb{C}$  und einem Vektor  $s(z)$ , dessen Einträge in  $z_0$  holomorph sind.

Im Folgenden wollen wir der Einfachheit halber immer den singulären Punkt  $z_0 = 0$  untersuchen. Jeder andere Fall kann durch eine Substitution der Variablen  $z$  auf diese Situation zurückgeführt werden. In diesem Fall können wir die Koeffizientenmatrix  $A(z)$  in eine Laurentreihe um  $z_0 = 0$  entwickeln, und wir schreiben diese Entwicklung in der Form

$$z^{r+1} A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j A_j \quad \forall z \in U_\rho, \quad (4.2.2)$$

wobei im Fall  $r \geq 1$  immer  $A_0 \neq 0$  gilt. Wir können im Grunde dasselbe auch für  $r = 0$  annehmen, da sonst der Nullpunkt keine Singularität des Systems ist. Dies spielt aber im Folgenden keine Rolle.

**Aufgabe 4.2.8 (Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung)** Sei  $n = 1$ , also (4.0.1) eine skalare Differentialgleichung erster Ordnung, und sei  $z_0 = 0$  ein singulärer Punkt vom Poincaré-Rang  $r$ . Zeige: Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung der Form

$$X(z) = F(z) z^L e^{Q(1/z)} \quad (0 < |z| < \rho), \quad (4.2.3)$$

mit einem Polynom  $Q(z)$  mit  $Q(0) = 0$  und  $\text{Grad } Q(z) = r$  falls  $r \geq 1$  ist, einer Zahl  $L \in \mathbb{C}$ , und einer in  $U_\rho$  holomorphen Funktion  $F(z)$  mit  $F(0) = 1$  – beachte aber, dass der Term  $z^L = e^{L \log z}$  eine mehrdeutige Funktion in  $U_\rho$  ist, was heißen soll, dass wir für ein  $z$  zuerst einen Zweig von  $\log z$  festlegen müssen, bevor  $X(z)$  eindeutig definiert ist. Zeige weiter, dass auch für allgemeines  $n$  eine solche Lösung existiert, falls alle Matrizen  $A_j$  miteinander kommutieren, wobei dann allerdings  $F(z), Q(z), L$  Matrizen sind, die ebenfalls miteinander kommutieren. In diesen Fällen ist also  $z_0 = 0$  genau dann eine reguläre Singularität, wenn  $r = 0$  ist. Im Allgemeinen werden wir sehen dass aus  $r = 0$  folgt, dass eine reguläre Singularität vorliegt, während die Umkehrung nicht gilt.

**Aufgabe 4.2.9** Sei  $r \in \mathbb{N}$ . Zeige dass das System

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z^{-r-1} & 0 \end{bmatrix} x$$

im Nullpunkt zwar den Poincaréschen Rang  $r$ , aber eine reguläre Singularität hat.

## 4.3 Singularitäten erster Art

Im Folgenden sei immer ein System (4.0.1) mit einer Singularität erster Art im Punkt  $z_0 = 0$  betrachtet, und die Matrix  $A(z)$  sei wie in (4.2.2) entwickelt, wobei natürlich  $r = 0$  zu setzen ist.

**Definition 4.3.1** Wir sagen, dass  $A_0$  die Eigenwertbedingung erfüllt, wenn für zwei beliebige Eigenwerte  $\mu$  und  $\nu$  von  $A_0$  die Differenz  $\mu - \nu$  niemals eine natürliche Zahl ist. Anders ausgedrückt heißt das: Wenn für zwei Eigenwerte  $\mu$  und  $\nu$  von  $A_0$  gilt  $\mu - \nu \in \mathbb{Z}$ , dann folgt  $\mu = \nu$ .

**Aufgabe 4.3.2** Seien  $A$  und  $B$  zwei quadratische Matrizen, nicht notwendigerweise von gleicher Größe, und so, dass sie keinen Eigenwert gemeinsam haben. Zeige dass die Matrixgleichung

$$AX - XB = C \quad (4.3.1)$$

für jede Matrix  $C$  von passender Größe immer eine eindeutig bestimmte Lösung  $X$  hat.

**Satz 4.3.3** Wenn  $A_0$  die Eigenwertbedingung erfüllt, dann gibt es genau ein Fundamentalsystem von (4.0.1) der Form

$$X(z) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} z^j F_j \right) z^{A_0} \quad (0 < |z| < \rho), \quad (4.3.2)$$

wobei  $F_0 = I$  ist und die übrigen Koeffizienten aus den Gleichungen

$$F_j (A_0 + jI) - A_0 F_j = \sum_{k=1}^j A_k F_{j-k} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (4.3.3)$$

rekursiv berechnet werden können.

**Beweis:** Wenn  $X(z)$  die behauptete Form hat, dann ist

$$z X'(z) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} z^j F_j (A_0 + jI) \right) z^{A_0}.$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt dass  $X(z)$  genau dann eine Lösung von (4.0.1) ist, wenn die Koeffizienten  $F_j$  die Gleichungen

$$F_j (A_0 + jI) = \sum_{k=0}^j A_k F_{j-k} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

erfüllen. Für  $j = 0$  und  $F_0 = I$  ist dies richtig, und die übrigen Gleichungen sind äquivalent zu (4.3.3). Wegen Aufgabe 4.3.2 und der Eigenwertbedingung sind hieraus die  $F_j$  für  $j \geq 1$  eindeutig berechenbar. Dies bedeutet, dass eine formale Lösung der behaupteten Form existiert, da wir noch nicht gezeigt haben, dass die Potenzreihe in  $U_\rho$  konvergiert. Um dies zu tun, gehen wir folgendermaßen vor: Wir teilen beide Seiten von (4.3.3) durch  $j$  und erkennen so, dass die Matrix  $F_j$  Lösung eines linearen Gleichungssystems ist, dessen Koeffizientenmatrix (der Größe  $n^2$ ) eine beschränkte Funktion von  $j$  ist und sogar gegen die Einheitsmatrix konvergiert, wenn  $j \rightarrow \infty$  geht. Also geht die Determinante der Koeffizientenmatrix gegen 1 für  $j \rightarrow \infty$ , und mit der Cramerschen Darstellung für die inverse Matrix folgt, dass auch diese eine beschränkte Funktion von  $j$  ist. Daraus folgt die Abschätzung

$$\|F_j\| \leq j^{-1} C \sum_{k=1}^j \|A_k\| \|F_{j-k}\| \quad \forall j \in \mathbb{N}_1,$$

mit einer hinreichend großen Konstanten  $C > 0$ . Wenn wir  $c_0 = \|F_0\|$  setzen und weiter definieren

$$c_j := j^{-1} C \sum_{k=1}^j \|A_k\| c_{j-k} \quad \forall j \in \mathbb{N}_1,$$

dann folgt induktiv  $\|F_j\| \leq c_j$  für  $j \geq 0$ . Mit  $c(t) := \sum_0^\infty c_j t^j$  und  $a(t) := C \sum_1^\infty \|A_j\| t^{j-1}$  folgt hieraus (formal) die Differentialgleichung  $c'(t) = a(t)c(t)$ . Aus der Konvergenz von (4.2.2) für  $|z| < \rho$  folgt

die Konvergenz der Reihe  $a(t)$  für  $|t| < \rho$ . Also ist  $a(t)$  in  $U_\rho$  holomorph, und die Differentialgleichung  $c'(t) = a(t)c(t)$  hat die Lösung

$$c(t) = c_0 \exp \left( \int_0^t a(\tau) d\tau \right).$$

Diese Lösung  $c(t)$  ist ebenfalls in  $U_\rho$  holomorph, und durch Koeffizientenvergleich folgt, dass die Potenzreihe für diese Funktion gleich der Reihe  $\sum_0^\infty c_j t^j$  sein muss. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe  $F(z)$  für  $|z| < \rho$ . Die Tatsache, dass  $X(z)$  ein Fundamentalsystem ist, folgt da die Determinante nicht identisch verschwindet.  $\square$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall eines Systems mit einer Singularität erster Art im Nullpunkt. Dabei wollen wir sagen dass bei einer (unteren) Dreiecksmatrix  $M$  die Eigenwerte (also die Diagonalelemente) *modulo 1 gruppiert sind*, wenn diejenigen Eigenwerte, deren Differenzen ganzzahlig sind, unmittelbar hintereinander stehen, und wenn innerhalb einer Gruppe solcher Eigenwerte deren Realteile monoton wachsen. Falls  $M$  die Eigenwertbedingung erfüllt, bedeutet dies lediglich, dass die gleichen unter den Diagonalelementen unmittelbar hintereinander angeordnet sind.

**Satz 4.3.4** *Bei beliebigem  $A_0$  gibt es ein Fundamentalsystem von (4.0.1) der Form*

$$X(z) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} z^j F_j \right) z^K z^M \quad (0 < |z| < \rho). \quad (4.3.4)$$

*Dabei ist  $F_0$  invertierbar, die Matrix  $M$  erfüllt die Eigenwertbedingung und ist eine untere Dreiecksmatrix mit modulo 1 gruppierten Eigenwerten, und  $K$  ist eine Diagonalmatrix mit monoton wachsenden ganzzahligen Diagonalelementen.*

**Beweis:** Wenn wir  $x = F(z)y$  in (4.0.1) einsetzen, wobei  $F(z)$  eine in  $U_\rho$  holomorphe Matrix ist, deren Determinante dort keine Nullstellen hat, so ist  $x(z)$  genau dann eine Lösung, wenn  $y(z)$  das *transformierte System*

$$y' = B(z)y, \quad B(z) = F^{-1}(z)(A(z)F(z) - F'(z))$$

löst. Anders geschrieben ergibt das folgendes Differentialgleichungssystem für die *Transformationsmatrix*  $F(z)$ :

$$F'(z) = A(z)F(z) - F(z)B(z), \quad (4.3.5)$$

wobei allerdings auch die Matrix  $B(z)$  zunächst unbekannt ist. Jedenfalls hat auch die Matrix  $B(z)$  im Nullpunkt einen Pol erster Ordnung. Wenn wir die Matrizen  $F(z)$ ,  $zA(z)$  und  $zB(z)$  in Potenzreihen um den Nullpunkt entwickeln und in (4.3.5) einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Beziehungen

$$jF_j = \sum_{k=0}^j (A_{j-k}F_k - F_k B_{j-k}) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Da  $F_0 = F(0)$  invertierbar ist, folgt für  $j = 0$  dass die Matrix  $B_0$  zu  $A_0$  ähnlich sein muss. Wir können daher  $B_0$  als Jordansche Normalform von  $A_0$  mit modulo 1 gruppierten Eigenwerten wählen, und die Matrix  $F_0$  ist dann eine entsprechende Transformationsmatrix. Für die weiteren Überlegungen wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass  $A_0$  selbst bereits in dieser Normalform vorliegt, und wir können dann  $F_0 = I$  setzen. Die verbleibenden Gleichungen schreiben wir dann in der Form

$$F_j(A_0 + jI) - A_0 F_j = A_j - B_j + \sum_{k=1}^{j-1} (A_{j-k}F_k - F_k B_{j-k}) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.3.6)$$

Die Matrix  $A_0$  ist eine direkte Summe aus Blöcken  $A_1(0), \dots, A_s(0)$ , wobei jeder Block  $A_\nu(0)$  einen einzigen Eigenwert  $\lambda_\nu$  hat, und alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  sind verschieden. Wenn wir die Matrizen  $F_j$ ,  $A_j$  und  $B_j$  in

entsprechend große Blöcke einteilen und diese mit  $F_{\nu\mu}(j)$  etc. bezeichnen, dann folgt aus (4.3.6) für alle  $j \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq \nu, \mu \leq s$

$$F_{\nu\mu}(j)(A_\mu(0) + jI) - A_\nu(0)F_{\nu\mu}(j) = -B_{\nu\mu}(j) + H_{\nu\mu}(j),$$

wobei der Block  $H_{\nu\mu}(j)$  nur von Matrizen  $F_k$  und  $B_k$  mit Index  $k < j$  abhängt und somit für die weiteren Überlegungen als bekannt angesehen werden kann. Wenn  $\lambda_\mu + j \neq \lambda_\nu$  ist, kann diese Gleichung für eine beliebige Wahl von  $B_{\nu\mu}(j)$  eindeutig nach  $F_{\nu\mu}(j)$  aufgelöst werden, und wir wählen in diesem Fall einfach  $B_{\nu\mu}(j) = 0$ . Falls dies nicht so ist, wählen wir dagegen  $F_{\nu\mu}(j) = 0$  und lösen die Gleichung nach  $B_{\nu\mu}(j)$  auf. Auf diese Weise erhalten wir eindeutig bestimmte Koeffizienten  $F_j$  und  $B_j$ , für welche (4.3.6) gilt. Für jedes Paar von Indizes  $\mu$  und  $\nu$  gibt es höchstens ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\lambda_\mu + j = \lambda_\nu$ , und zwar wegen der gewählten Anordnung der Eigenwerte von  $A_0$  höchstens dann, wenn  $\nu > \mu$  ist. Daher sind nur endlich viele der Matrizen  $B_j \neq 0$ , und ein Block in Position  $(\nu, \mu)$  ist nur für ein einziges  $j$  nicht-trivial. Wenn man dies beachtet, sieht man, dass das transformierte Differentialgleichungssystem  $y' = B(z)y$  eine Fundamentallösung  $Y(z) = z^K z^M$  hat, mit  $M$  und  $K$  wie im Satz beschrieben – vergleiche dazu auch Aufgabe 4.3.5. Außerdem kann man durch eine Abschätzung wie im Beweis des vorangegangenen Satzes zeigen, dass die Potenzreihe  $F(z)$  für  $|z| < \rho$  konvergiert. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

**Aufgabe 4.3.5** Seien  $K$  und  $M$  Matrizen der im letzten Satz beschriebenen Form. Zeige  $(z^K z^M)' = z^{-1}(K + z^K M z^{-K})$  und benutze dies um zu beweisen, dass das System  $y' = B(z)y$  eine Fundamentallösung der Form  $Y(z) = z^K z^M$  hat.

## 4.4 Skalare Gleichungen höherer Ordnung

Einerseits kann man zwar Gleichungen höherer Ordnung immer in ein System umschreiben, andererseits ist aber die Berechnung von Lösungen meist einfacher, wenn man dies nicht tut. Aus diesem Grund, und weil viele für die Anwendungen wichtige Gleichungen ohnehin von dieser Art sind, untersuchen wir jetzt Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung der Form

$$a_n(z)y^{(n)} + \dots + a_1(z)y' + a_0(z)y = 0 \quad (z \in G), \quad (4.4.1)$$

wobei  $G \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und die Koeffizientenfunktionen  $a_j(z)$  in  $G$  holomorph sind. Wir setzen weiter voraus, dass der höchste Koeffizient  $a_n(z)$  nicht identisch verschwindet, da wir sonst  $n$  erniedrigen könnten. Da man diese Differentialgleichung eigentlich durch  $a_n(z)$  dividieren sollte, sind die Nullstellen dieser Funktion gerade die singulären Punkte der Gleichung. Ist  $z_0$  eine dieser Nullstellen, so können wir weiter annehmen, dass nicht alle der übrigen Koeffizienten ebenfalls die Nullstelle  $z_0$  haben, da man sonst die Gleichung durch  $z - z_0$  teilen könnte.

Wenn man die Gleichung (4.4.1) in der üblichen Weise in ein System umschreibt, dann hat dieses System genau dann eine Singularität erster Art im Punkt  $z_0$ , wenn die Funktionen  $a_j(z)/a_n(z)$  dort eine Polstelle höchstens erster Ordnung haben. Wie wir unten sehen werden, gibt es aber eine bessere Art, eine Gleichung in ein äquivalentes System zu verwandeln, welches auch dann eine Singularität erster Art hat, wenn die Polordnungen von  $a_j(z)/a_n(z)$  größer sind. Dies wird in der folgenden Definition vorweggenommen.

**Definition 4.4.1** Für eine Gleichung der obigen Form heißt  $z_0$  eine Singularität erster Art, wenn für alle  $j = 0, \dots, n-1$  die Funktionen  $a_j(z)/a_n(z)$  im Punkt  $z_0$  eine Polstelle höchstens  $(n-j)$ -ter Ordnung haben. Für  $G = \mathbb{C}$  verwenden wir dieselbe Bezeichnung für  $z_0 = \infty$ , falls für alle  $j = 0, \dots, n-1$  die Funktionen  $a_j(z)/a_n(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  eine Nullstelle mindestens  $(n-j)$ -ter Ordnung haben. Wenn  $G = \mathbb{C}$  ist, und wenn alle singulären Punkte einschließlich  $\infty$  Singularitäten erster Art sind, dann heißt die Gleichung vom Fuchsschen Typ. Wie im Fall eines Systems nennen wir  $z_0 \in \mathbb{C}$  bzw.  $z_0 = \infty$  einen regulär-singulären Punkt oder reguläre Singularität, wenn alle Lösungen für  $z \rightarrow z_0$  nicht schneller als eine Potenz von  $(z - z_0)^{-1}$  bzw. von  $z$  anwachsen.

**Bemerkung 4.4.2** Sei  $z_0 = 0$  eine Singularität erster Art von (4.4.1), und sei  $x_j(z) := z^{j-1} y^{(j-1)}(z)$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist  $x'_j(z) = z^{-1}((j-1)x_j(z) + x_{j+1}(z))$ . Wenn  $y(z)$  eine Lösung von (4.4.1) ist, dann ist speziell

$$x'_n(z) = z^{-1}((n-1)x_n(z) + \sum_{j=1}^n \frac{z^{n-j} a_{j-1}(z)}{a_n(z)} x_j(z)).$$

Daher ist die skalare Gleichung (4.4.1) äquivalent zu einem homogenen linearen System für den Vektor  $x(z) := (x_1(z), \dots, x_n(z))^T$ , dessen Koeffizientenmatrix im Nullpunkt einen Pol erster Ordnung hat. Dies erklärt die obige Bezeichnung der endlichen Singularitäten von (4.4.1). Den Fall  $z_0 = \infty$  kann man durch Substitution  $w = 1/z$  auf  $w_0 = 0$  zurückführen.

**Satz 4.4.3** Genau dann ist (4.4.1) vom Fuchsschen Typ, wenn es endlich viele  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  gibt, so dass gilt

$$\frac{a_{n-j}(z)}{a_n(z)} = \frac{p_j(z)}{(z-z_1)^j \cdots (z-z_m)^j} \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

mit Polynomen  $p_j(z)$  vom Grad höchstens gleich  $(m-1)j$ .

**Beweis:** Seien  $b_j(z) := a_{n-j}(z)/a_n(z)$ . Falls die Gleichung vom Fuchsschen Typ ist, dann sind diese Funktionen in  $\mathbb{C}$  meromorph und beschränkt und können deshalb nur endlich viele Polstellen haben. Wenn wir diese mit  $z_1, \dots, z_m$  bezeichnen, sind diese gerade die endlichen singulären Stellen erster Art der Gleichung, und deshalb folgt dass die Funktionen  $b_j(z) (z-z_1)^j \cdots (z-z_m)^j$  nur hebbare Singularitäten in  $\mathbb{C}$  und bei  $\infty$  höchstens Pole haben. Also sind diese Funktionen Polynome, und da auch  $\infty$  eine Singularität erster Art sein soll, folgt dass der Grad dieser Polynome maximal gleich  $(m-1)j$  sein kann. Also gilt eine Richtung der Behauptung, und die Rückrichtung folgt ebenfalls mit der Definition der singulären Stellen erster Art.  $\square$

## 4.5 Die Frobenius-Methode

In diesem Abschnitt wollen wir sehen, wie man in einer Umgebung einer Singularität erster Art ein Fundamentalsystem von (4.0.1) berechnen kann. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der betrachtete regulär-singuläre Punkt der Gleichung der Nullpunkt ist. In diesem Fall kann man (4.0.1) immer in der folgenden Form schreiben:

$$P(z, d/dz)y = 0, \quad P(z, d/dz) := z^n \frac{d^n}{dz^n} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k(z) z^k \frac{d^k}{dz^k}, \quad (4.5.1)$$

wobei die Funktionen  $b_k(z)$  in einer Kreisscheibe  $U_\rho$  um den Nullpunkt holomorph sind. Die im Folgenden dargestellte Methode zur Berechnung eines Fundamentalsystems für (4.5.1) geht auf *F. G. Frobenius* zurück.

Sei  $\mu \in \mathbb{C}$  ein komplexer Parameter, und sei  $y(z; \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(\mu) z^{j+\mu}$  eine Potenzreihe mit beliebigen Koeffizientenfunktionen  $y_j(\mu)$ . Wenn wir  $b_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j} z^j$  für  $k = 0, \dots, n-1$  setzen, dann ist

$$P(z, d/dz)y(z; \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+\mu} \left\{ p(j+\mu) y_j(\mu) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{j-1} p_k(\mu+m) b_{k,j-m} y_m(\mu) \right\},$$

mit  $p_k(\nu) = \nu(\nu-1) \cdots (\nu-k+1)$ , und

$$p(\nu) = p_n(\nu) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\nu) b_{k,0}. \quad (4.5.2)$$

Unser erstes Ziel ist es, die Koeffizientenfunktionen  $y_j(\mu)$  so zu bestimmen, dass  $P(z, d/dz)y(z; \mu) = p(\mu)y_0(\mu)z^\mu$  ist. Dies gilt genau dann, wenn wir  $y_0(\mu)$  beliebig wählen und die übrigen Funktionen rekursiv durch die Gleichungen

$$y_j(\mu) = \frac{-1}{p(j+\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{j-1} p_k(\mu+m) b_{k,j-m} y_m(\mu) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

bestimmen. Wenn wir z. B. für  $y_0(\mu)$  ein beliebiges Polynom wählen, dann sind alle  $y_j(\mu)$  rationale Funktionen in  $\mu$ , mit potentiellen Polen höchstens an den Stellen, an denen  $p(j+\mu) = 0$  ist für ein  $j \in \mathbb{N}$ . Da  $p(\mu)$  ein normiertes Polynom  $n$ -ten Grades ist, kann es höchstens  $n$  Nullstellen haben – allerdings gibt es für jede Nullstelle  $\mu_0$  abzählbar unendlich viele potentielle Polstellen, nämlich die Zahlen  $\mu = \mu_0 - j$  mit  $j \in \mathbb{N}$ . Die Gesamtmenge aller potentiellen Polstellen ist somit eine diskrete Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Wie in Abschnitt 4.3 kann man zeigen, dass die Potenzreihe  $y(z; \mu)$  für jedes feste  $\mu$ , welches keine dieser Polstellen ist, in der Kreisscheibe  $U_\rho$  konvergiert. Außerdem ist  $y(z; \mu)$  beliebig oft nach  $\mu$  partiell differenzierbar, und die Differentiationen nach  $\mu$  und  $z$  sind von der Reihenfolge unabhängig. Daher folgen aus  $P(z, d/dz)y(z; \mu) = p(\mu)y_0(\mu)z^\mu$  mit der Leibnizregel für Ableitungen die Gleichungen

$$P(z, d/dz) \frac{\partial^\nu}{\partial \mu^\nu} y(z; \mu) = z^\mu \sum_{m=0}^{\nu} \binom{\nu}{m} (p(\mu)y_0(\mu))^{\nu-m} (\log z)^\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0. \quad (4.5.3)$$

Zur Berechnung eines Fundamentalsystems für (4.5.1) wollen wir nun  $y_0(\mu)$ ,  $\nu$  und  $\mu$  so wählen, dass die rechte Seite von (4.5.3) verschwindet. Dazu unterscheiden wir folgende beiden Fälle:

1. Sei  $\mu_0$  eine Nullstelle von  $p(\mu)$  der Vielfachheit  $s_0$ , und sei  $p(\mu_0+j) \neq 0$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Beachte, dass diese Annahme für mindestens eine Nullstelle von  $p(\mu)$  erfüllt ist und sogar für alle Nullstellen gilt, falls deren Differenzen keine natürlichen Zahlen sind – dies entspricht genau der Eigenwertbedingung aus Abschnitt 4.3. In diesem Fall ist  $p^{(\nu)}(\mu_0) = 0$  für alle  $\nu = 0, \dots, s_0 - 1$ . Wenn wir z. B.  $y_0(\mu) \equiv 1$  wählen, dann erhalten wir insgesamt  $s_0$  Lösungen der Form

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \mu^\nu} y(z; \mu)|_{\mu=\mu_0} = \sum_{m=0}^{\nu} \binom{\nu}{m} (\log z)^{\nu-m} \sum_{j=0}^{\infty} y_j^{(m)}(\mu_0) z^{j+\mu_0}.$$

Man kann zeigen, dass die so erhaltenen Lösungen linear unabhängig sind. Also bekommen wir insbesondere für Gleichungen, bei denen die Differenzen der Nullstellen von  $p(\mu)$  keine natürlichen Zahlen sind, ein volles Fundamentalsystem von Lösungen.

2. Sei jetzt zugelassen, dass es Nullstellen von  $p(\mu)$  gibt, welche sich um natürliche Zahlen unterscheiden. Sei  $\mu_0$  wieder eine beliebige Nullstelle von  $p(\mu)$ , und sei  $j_0 \in \mathbb{N}_0$  maximal gewählt, so dass  $p(\mu_0 + j_0) = 0$  ist. Dann können wir o. B. d. A. annehmen, dass  $\mu_0 - j$  für  $j \in \mathbb{N}$  keine Nullstellen von  $p(\mu)$  sind, denn andernfalls können wir  $\mu_0$  durch  $\mu_0 - j$  und  $j_0$  durch  $j_0 + j$  ersetzen. Wenn wir jetzt  $y_0(\mu) = p(\mu+1) \cdot \dots \cdot p(\mu+j_0)$  wählen, erhalten wir eine Folge von Koeffizienten  $y_j(\mu)$ , welche an der Stelle  $\mu_0$  keine Pole haben. In diesem Fall hat die Funktion  $p(\mu)y_0(\mu)$  für  $\mu = \mu_0$  eine Nullstelle, deren Ordnung gleich der Summe aus den Nullstellenordnungen von  $p(\mu+j)$  für  $j = 0, \dots, j_0$  ist. Die Koeffizienten  $y_j(\mu)$  für  $0 \leq j \leq j_0 - 1$  haben an der Stelle  $\mu_0$  Nullstellen, deren Ordnung mit  $j$  abnimmt, und zwar jeweils genau um die Nullstellenordnung von  $p(\mu+j)$  an der Stelle  $\mu = \mu_0$  (dies gilt auch, falls die Nullstellenordnung = 0 ist), und  $y_{j_0}(\mu)$  hat keine Nullstelle mehr. Wie oben erhalten wir durch partielles Differenzieren nach  $\mu$  und anschließendes Einsetzen von  $\mu_0$  Lösungen von (4.5.1), die alle linear unabhängig sind, und deren Anzahl gleich der Nullstellenordnung von  $p(\mu)y_0(\mu)$  ist.

Mit Hilfe dieses Verfahrens kann man in jedem Fall ein Fundamentalsystem für (4.5.1) berechnen. Die lineare Unabhängigkeit der berechneten Lösungen ergibt sich z. B. dadurch, dass sie für  $z \rightarrow 0$  unterschiedlich schnell anwachsen – dies soll hier nicht genau gezeigt werden.

**Definition 4.5.1 (Charakteristisches Polynom)** Das oben definierte Polynom  $p(\mu)$  bezeichnen wir als charakteristisch im singulären Punkt  $z_0 = 0$  für die Differentialgleichung (4.5.1), seine Nullstellen heißen auch die Floquetschen Exponenten.

**Aufgabe 4.5.2** Berechne das charakteristische Polynom  $p(z)$  sowie, unter der Annahme dass die Nullstellen von  $p(z)$  bekannt sind, ein Fundamentalsystem für die sog. Eulersche Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^n z^k \frac{d^k}{dz^k} y = 0,$$

also für die Gleichung (4.5.1) mit  $b_k(z) \equiv 1$  für  $k = 0, \dots, n-1$ .

## 4.6 Reguläre Singularitäten

Aus der Frobenius-Methode folgt dass jede Singularität erster Art von (4.4.1) ein regulär-singulärer Punkt ist. Anders als bei Systemen gilt bei Gleichungen  $n$ -ter Ordnung auch die Umkehrung:

**Satz 4.6.1** Jeder regulär-singuläre Punkt von (4.4.1) ist eine Singularität erster Art.

**Beweis:** Sei o. B. d. A. der Nullpunkt ein regulär-singulärer Punkt von (4.4.1). Wenn wir die Gleichung in der Form (4.5.1) schreiben, ist zu zeigen, dass alle  $b_j(z)$  im Nullpunkt holomorph sind. Dies tun wir durch vollständige Induktion über  $n$ : Aus Aufgabe 4.2.7 folgt die Existenz einer Lösung der Form  $y_0(z) = s(z) z^\mu$ , wobei  $\mu \in \mathbb{C}$  und  $s(z)$  im Nullpunkt holomorph ist und o. B. d. A. angenommen werden kann, dass  $s(0) \neq 0$  ist, da wir sonst  $\mu$  um eine natürliche Zahl abändern können. Für  $n = 1$  folgt hieraus

$$b_0(z) = - \frac{\mu s(z) + z s'(z)}{s(z)},$$

und daher ist  $b_0(z)$  im Nullpunkt holomorph, was zu zeigen war. Für beliebiges  $n \geq 2$  sei  $y = y_0(z) \tilde{y}$ . Setzt man in (4.5.1) ein, so folgt (mit  $b_m(z) \equiv 1$ )

$$0 = \sum_{k=1}^n \tilde{y}^{(k)} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k}{k} z^{j+k} b_{j+k}(z) y_0^{(j)}(z),$$

wobei in der äußeren Summe der Term für  $k = 0$  fehlt, da  $y_0(z)$  die Gleichung (4.5.1) erfüllt. Da  $z^j y_0^{(j)}(z) = z^\mu s_j(z)$  ist, mit einer im Nullpunkt holomorphen Funktion  $s_j(z)$ , folgt nach Division durch  $z y_0(z)$  für  $z$  in einer hinreichend kleinen Kreisscheibe um 0 (in der  $s(z) \neq 0$  ist) die Gleichung

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \tilde{y}^{(k+1)} c_k(z), \quad c_k(z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{j+k+1}{k+1} b_{j+k+1}(z) s_j(z)/s(z),$$

und  $c_{n-1}(z) \equiv 1$ . Dies ist eine Differentialgleichung  $(n-1)$ -ter Ordnung für die Funktion  $\tilde{y}'$ , und der Nullpunkt ist eine reguläre Singularität. Wenn wir auf diese Gleichung die Induktionshypothese anwenden, folgt dass alle  $c_{k-1}(z)$  im Nullpunkt holomorph sind. Durch Auflösen nach  $b_k(z)$  (und Beachtung von  $b_n(z) \equiv 1$ ) folgt dann deren Holomorphie im Nullpunkt, also die Behauptung.  $\square$

Der letzte Satz zeigt, dass bei skalaren Gleichungen das Vorliegen einer regulären Singularität leicht aus der Form der Gleichung abgelesen werden kann. Dies ist bei Systemen im Allgemeinen nicht so!

## 4.7 Die hypergeometrische Differentialgleichung

In den folgenden Abschnitten betrachten wir einige spezielle skalare lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mit der Frobenius-Methode kann man in jedem Fall ein Fundamentalsystem dieser Gleichungen berechnen – wir wollen uns aber auf den wichtigsten Fall beschränken, in welchem die beiden Eigenwerte keine ganzzahlige Differenz haben.

**Definition 4.7.1** Für beliebige Parameter  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  heißt die Gleichung

$$z(1-z)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (4.7.1)$$

die hypergeometrische Differentialgleichung. Sie hat drei regulär-singuläre Punkte, nämlich 0, 1 und  $\infty$ .

Als Pochhammer-Symbol bezeichnen wir folgende Produkte von komplexen Zahlen:

$$\forall a \in \mathbb{C} : \quad (a)_0 = 1, \quad (a)_j = a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+j-1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Offenbar ist  $(1)_j = j!$ , und  $(-k)_j = 0$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $j > k$ .

**Aufgabe 4.7.2** Zeige für  $a \in \mathbb{C}$  und  $j \in \mathbb{N}$ :

$$\binom{a}{j} = (-1)^j \frac{(-a)_j}{j!}.$$

Zeige weiter: Ist  $-a \notin \mathbb{N}_0$ , so gilt  $(a)_j = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$ , wobei  $\Gamma(z)$  die Gamma-Funktion bezeichnet.

**Aufgabe 4.7.3** Finde für die hypergeometrische Differentialgleichung an jeder ihrer singulären Stellen das charakteristische Polynom und die Floquetschen Exponenten.

In der folgenden Berechnung von Fundamentalsystemen kann man sich strikt an der Frobenius-Methode orientieren; wir wollen aber noch einen geringfügig anderen Rechenweg kennen lernen, welcher einfacher ist, solange die Differenz der Floquetschen Exponenten keine ganze Zahl ist.

- **Berechnung eines Fundamentalsystems im Punkt  $z_0 = 0$ :** Um die folgenden Rechnungen und Argumente zu erleichtern, stellen wir uns vor, dass wir (formale) Lösungen von (4.7.1) suchen, welche die Form  $y(z) = \sum y_j z^{j+\mu}$  haben sollen, wobei die Summation über alle  $j \in \mathbb{Z}$  erstreckt wird, aber die Koeffizienten  $y_j = 0$  sind wenn  $j < 0$  ist, und o. B. d. A.  $y_0 = 1$  angenommen sei. Wenn man diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt, findet man durch Koeffizientenvergleich, dass  $y(z)$  genau dann eine Lösung von (4.7.1) ist, wenn für alle  $j \in \mathbb{Z}$  die Gleichungen

$$(j + \mu + 1)(j + \mu + \gamma)y_{j+1} = ((j + \mu)(j + \mu + \alpha + \beta) + \alpha\beta)y_j = (j + \mu + \alpha)(j + \mu + \beta)y_j$$

gelten. Für  $j \leq -2$  sind diese Gleichungen trivial erfüllt, während für  $j = -1$  (wegen  $y_0 \neq 0$ ) folgt, dass

$$\mu(\mu + \gamma - 1) = 0$$

sein muss. Daher erhalten wir wie in Aufgabe 4.7.3 zwei mögliche Werte für  $\mu$ , nämlich die beiden Floquetschen Exponenten  $\mu = 0$  bzw.  $\mu = 1 - \gamma$ . Im ersten Fall von  $\mu = 0$  wollen wir die übrigen Gleichungen für  $j \geq 0$  zur Berechnung von  $y_{j+1}$  benutzen, müssen dazu aber voraussetzen, dass  $-\gamma \neq \mathbb{N}_0$  ist. Wenn wir dies tun, folgt induktiv

$$y_j = \frac{(\alpha)_j (\beta)_j}{(\gamma)_j j!} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, \quad (4.7.2)$$



wobei wir das oben definierte Pochhammer-Symbol benutzen. Wir notieren diese Lösung in der Form

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (\beta)_j}{(\gamma)_j j!} z^j \quad (4.7.3)$$

und nennen sie *die hypergeometrische Funktion*. Offenbar hat die Potenzreihe den Konvergenzradius  $R = 1$ , außer wenn sie abbricht, d. h., ein Polynom ist – siehe hierzu die unten stehenden Aufgaben.

Um die Lösung zum Exponenten  $\mu = 1 - \gamma$  zu finden, unterwerfen wir die Differentialgleichung der *Transformation*  $y = z^{1-\gamma} \tilde{y}$  und erhalten, dass  $y$  genau dann eine Lösung von (4.7.1) ist, wenn  $\tilde{y}$  wieder einer hypergeometrischen Gleichung genügt, wobei allerdings die Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  durch  $\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma$  ersetzt sind. Also ist auch

$$z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)$$

für jede Wahl eines Zweiges von  $z^{1-\gamma}$  eine Lösung von (4.7.1), sofern  $\gamma - 2 \notin \mathbb{N}_0$  ist. Für  $\gamma = 1$  erhalten wir aber die gleiche Lösung wie vorher. Wenn jedoch  $\gamma \notin \mathbb{Z}$  ist, dann bilden die beiden Lösungen ein Fundamentalsystem.

Es ist wichtig zu beachten, dass wir zu jedem Wert von  $\gamma$  mindestens eine Lösung berechnet haben, und für  $\gamma \notin \mathbb{Z}$  erhalten wir sogar ein Fundamentalsystem. Wie man für ganze Zahlen  $\gamma$  noch eine zweite Lösung findet und wie diese aussieht, ergibt sich aus der Frobenius-Methode.

- **Berechnung eines Fundamentalsystems im Punkt  $z_0 = 1$ :** Einerseits kann man das gesuchte Fundamentalsystem analog wie im ersten Fall berechnen, indem man einen entsprechenden Ansatz macht. Einfacher geht es aber, wenn man die Substitution  $w = 1 - z$  verwendet. Diese überführt (4.7.1) in eine neue Gleichung derselben Form, allerdings mit dem Parameter  $\alpha + \beta + 1 - \gamma$  an Stelle von  $\gamma$ . Wenn also  $\alpha + \beta + 1 - \gamma \notin \mathbb{Z}$  ist, bilden die Funktionen  $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z)$  und  $(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z)$  ein Fundamentalsystem in der Kreisscheibe  $K(1, 1)$ , wenn man den Zweig der Potenz von  $1 - z$  beliebig festlegt.
- **Berechnung eines Fundamentalsystems im Punkt  $z_0 = \infty$ :** Hier kann man die Substitution  $w = 1/z$  verwenden und für die neue Gleichung ein Fundamentalsystem bei  $w_0 = 0$  berechnen. Die Rücksubstitution zeigt dann, dass (4.7.1), im Fall dass  $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$  ist, das Fundamentalsystem aus den Funktionen  $z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha - \beta + 1; 1/z)$  und  $z^{-\beta} F(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta - \alpha + 1; 1/z)$  besitzt.

**Bemerkung 4.7.4** *In der oben geführten Diskussion der Fundamentalsysteme für die hypergeometrische Differentialgleichung traten allgemeine Potenzen von  $z$  bzw.  $1 - z$  auf. Nach Wahl eines Zweiges dieser Funktionen an einer Stelle  $z_1$  lassen sich die so erhaltenen Lösungen in jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $G$ , welches  $z_1$  aber nicht die singulären Stellen  $0, 1, \infty$  enthält, analytisch fortsetzen. Eine übliche Wahl eines solchen Gebietes, etwa für  $z_1 = 1/2$  in den Fällen  $z_0 = 0$  und  $z_0 = 1$ , oder für  $z_1 = 1/2 + i$  im dritten Fall, ist*

$$G_{\pm} := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ oder } x \geq 1\}.$$

*Anschaulich erhält man dieses Gebiet, wenn man die Ebene mit einer Schere von 0 bzw. 1 aus entlang der negativen bzw. positiven reellen Achse bis nach  $\infty$  aufschneidet. Man kann in jedem Fall die Lösungen auch auf die "beiden Ufer" dieser Schnitte fortsetzen, erhält dabei allerdings im Allgemeinen unterschiedliche Grenzwerte. Wenn man statt eines Fundamentalsystems nur die hypergeometrische Funktion selber untersuchen will, ist der Schnitt entlang der negativ-reellen Achse überflüssig, da ja  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  für  $z = 0$  holomorph ist, und da deshalb die Fortsetzung auf die beiden Ufer dieses Schnittes zum gleichen Ergebnis führt. Aus diesem Grunde schreiben wir im Folgenden auch  $G_+$  für das Gebiet mit dem einen Schnitt von 1 nach  $\infty$  entlang der positiv-reellen Achse.*

*Statt entlang der reellen Achse kann man grundsätzlich auch entlang anderer sich nicht überkreuzenden Halbgeraden von 0 bzw. 1 aus aufschneiden. Dies ist aber nicht üblich.*

**Aufgabe 4.7.5** *Zeige dass  $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = F(\beta, \alpha, \gamma; z)$  ist, und dass die hypergeometrische Funktion genau dann ein Polynom ist, wenn  $-\alpha \in \mathbb{N}_0$  oder  $-\beta \in \mathbb{N}_0$  ist.*

**Aufgabe 4.7.6** Zeige für  $-\gamma \neq \mathbb{N}_0$  und  $z \in G_+$  die Identitäten

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(1 + \alpha, 1 + \beta, 1 + \gamma; z),$$

$$\left(\alpha + z \frac{d}{dz}\right) F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \alpha F(1 + \alpha, \beta, \gamma; z),$$

und finde selber weitere Identitäten dieser Art.

**Aufgabe 4.7.7** Zeige für reelle  $x$  mit  $-1 < x < 1$

$$(1 - x)^{-\alpha} = F(\alpha, 1, 1; x),$$

$$\log(1 - x) = x F(1, 1, 2; x),$$

$$\arctan x = x F(1/2, 1, 3/2; -x^2).$$

**Satz 4.7.8 (Integraldarstellung)** Für  $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \beta > 0$  gilt

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1}}{(1-tz)^\alpha} dt \quad \forall z \in G_+. \quad (4.7.4)$$

**Beweis:** Für  $|z| < 1$  und  $0 \leq t \leq 1$  gilt  $(1-tz)^{-\alpha} = \sum_0^\infty (\alpha)_j (tz)^j / j!$ , und die Reihe ist in  $t$  gleichmäßig konvergent. Wenn man dies in die rechte Seite von (4.7.4) einsetzt, kann man Integration und Summation vertauschen. Mit dem *Beta-Integral*

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0 \quad (4.7.5)$$

folgt die Behauptung für diese  $z$ . Wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen gilt die Darstellung dann sogar in  $G_+$ .  $\square$

## 4.8 Die Besselsche Differentialgleichung

**Definition 4.8.1** Für beliebiges  $\nu \in \mathbb{C}$  heißt

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0 \quad (4.8.1)$$

die Besselsche Differentialgleichung. Sie hat einen regulär-singulären Punkt in  $z_0 = 0$  und einen irregulär-singulären Punkt in  $\infty$ .

Ähnlich wie bei der hypergeometrischen Differentialgleichung wollen wir wieder nur für den Hauptfall ein Fundamentalsystem der Besselschen Gleichung im Nullpunkt berechnen. Dabei wollen wir die Einzelheiten der Berechnung auslassen und nur das Ergebnis angeben:

- Für beliebiges  $\nu \in \mathbb{C}$  hat (4.8.1) die Lösung

$$J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} (z/2)^{2j + \nu}, \quad (4.8.2)$$

wobei die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert. Wir bezeichnen  $J_\nu(z)$  auch als *Besselfunktion*. Da die Gleichung bei Substitution  $\nu \mapsto -\nu$  nicht geändert wird, ist auch  $J_{-\nu}(z)$  eine Lösung, und wenn  $\nu \notin \mathbb{Z}$  ist, bilden diese beiden Lösungen ein Fundamentalsystem.

**Aufgabe 4.8.2** Zeige folgende Integraldarstellung der Besselfunktion: Für  $x \in \mathbb{R}_+$  und  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$  gilt

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2) \sqrt{\pi} 2^\nu} \int_0^x (x^2 - \tau^2)^{\nu-1/2} \cos \tau \, d\tau. \quad (4.8.3)$$

**Aufgabe 4.8.3** Zeige dass  $J_\nu(z)$  und  $J_{-\nu}(z)$  genau dann linear unabhängig über  $\mathbb{C}$  sind, wenn  $\nu \notin \mathbb{Z}$  ist.  
**Anleitung:** Benutze dass  $1/\Gamma(z)$  eine ganze Funktion ist, die genau an den Stellen  $-z \in \mathbb{N}_0$  Nullstellen hat.

# Kapitel 5

## Separation der Variablen

Viele praktische Probleme sind von einer solchen Form, dass sie einen bestimmten Lösungsansatz nahelegen. Eine spezielle Technik bei partiellen Differentialgleichungen ist die der *Separation der Variablen*, bei der man eine Funktion mehrerer Variabler als ein Produkt von Funktionen von einer dieser Variablen alleine ansetzt und die einzelnen Funktionen zum Beispiel als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält. Wir zeigen in Beispielen, wie man hier vorgeht.

### 5.1 Die schwingende Saite

Die Schwingungen einer Saite werden durch die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} + 2r u_t = c^2 u_{xx} + f(t, x) \quad (5.1.1)$$

beschrieben. Dabei beschreiben die Veränderlichen  $t$  die Zeit und  $x$  einen Punkt auf der Saite, während die (gegebene) Funktion  $f(t, x)$  die zum Zeitpunkt  $t$  auf diesen Punkt einwirkende Kraft beschreibt. Wir nehmen dabei an, dass die Auslenkung der Saite aus ihrer Ruhelage nur in einer Richtung geschieht, und dass die (unbekannte) Lösung  $u(t, x)$  der Gleichung die Größe dieser Auslenkung beschreibt. Weiter sollen  $r \geq 0$  und  $c > 0$  zwei (reelle) Zahlen sein, und wir werden uns auf den Fall einer kleinen Dämpfungskonstanten  $r$  beschränken. Die Länge der Saite sei  $\ell > 0$ , und da die Enden der Saite fest eingespannt sein sollen, muss eine Lösung  $u(t, x)$  die *Randbedingungen*

$$u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.1.2)$$

erfüllen. Schließlich stellen wir uns vor, dass Ausgangslage und -geschwindigkeit der Saite zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt sind; dies entspricht der Vorgabe von *Anfangsbedingungen*

$$u(0, x) = g(x), \quad u_t(0, x) = h(x) \quad \forall x \in [0, \ell], \quad (5.1.3)$$

mit gegebenen Funktionen  $g, h : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir als stetig, aber nicht unbedingt als differenzierbar voraussetzen wollen. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist es üblich, die Gleichung (5.1.1) als *inhomogen*, und die Gleichung

$$u_{tt} + 2r u_t = c^2 u_{xx} \quad (5.1.4)$$

als (zugehörige) *homogene Gleichung* zu bezeichnen. Diese soll im Folgenden zuerst gelöst werden.

#### 5.1.1 Die homogene Gleichung

Zur Lösung von (5.1.4) verwenden wir einen sogenannten *Separationsansatz*. Das bedeutet, dass wir momentan die Anfangsbedingungen (5.1.3) ignorieren und nicht-triviale Lösungen von (5.1.4) zu finden

versuchen, die die Randbedingungen (5.1.2) erfüllen und von der sehr speziellen Form

$$u(t, x) = u(t) v(x)$$

sind, wobei keine der beiden Funktionen die Nullfunktion sein soll. Einsetzen in die Gleichung und Sortieren der Terme ergibt dann

$$\frac{u''(t) + 2r u'(t)}{u(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Das bedeutet, dass beide Seiten dieser Gleichung gleich einer Konstanten sein müssen, welche wir als  $-c^2 \lambda^2$  schreiben wollen, wobei momentan auch zugelassen sei, dass  $\lambda^2 \leq 0$ , also  $\lambda$  imaginär sein kann. Jedenfalls folgt dann

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \ell].$$

Falls  $\lambda = 0$  ist, ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung von der Form  $v(x) = ax + b$  mit Konstanten  $a, b$ , und dann können die Randbedingungen (5.1.2) nur für  $a = b = 0$ , also  $v(x) \equiv 0$  gelten, was dem Ansatz widerspricht. Für  $\lambda \neq 0$  ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung (in komplexer Form) gleich

$$v(x) = a e^{-i\lambda x} + b e^{i\lambda x}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Damit (5.1.2) gilt, müssen die Konstanten  $a, b$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-i\lambda\ell} & e^{i\lambda\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

erfüllen. Wenn dieses System eine nicht-triviale Lösung haben soll, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden, und deshalb muss gelten

$$e^{2i\lambda\ell} = 1.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\lambda\ell$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist. Wir können uns dann o. B. d. A. auf  $\lambda > 0$  beschränken und erhalten dann die sogenannten *Eigenwerte der schwingenden Saite*

$$\lambda_k = k \frac{\pi}{\ell}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Konstanten  $a$  und  $b$  müssen dann noch  $a + b = 0$  erfüllen, und wir wählen o. B. d. A.  $b = 1/(2i)$ ,  $a = -b$ , denn dann ist  $v_k(x) = \sin(\lambda_k x)$  die entsprechende Lösung.

Für  $u(t)$  ergibt sich die Gleichung

$$u''(t) + 2r u'(t) + (c\lambda_k)^2 u(t) = 0,$$

welche für  $r < c\lambda_k$  die allgemeine Lösung

$$u(t) = e^{-rt} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)), \quad \omega_k = \sqrt{c^2 \lambda_k^2 - r^2}, \quad A_k, B_k \in \mathbb{R}$$

hat. Zusammenfassend erhalten wir für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Lösung der Form

$$u_k(t, x) = e^{-rt} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \sin(\lambda_k x),$$

mit beliebigen Konstanten  $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ . Diese Funktionen heißen die *Eigenschwingungen* der Saite. Sie sind für  $r > 0$  immer exponentiell abklingende Schwingungen. Die Abklingrate ist von  $k$  völlig unabhängig, während die Frequenz  $\omega_k$  von  $k$ , aber auch von  $r$  abhängt. Mit wachsendem  $r$  werden die Frequenzen niedriger, was auch einleuchtet.

Bis jetzt sind die Anfangsbedingungen (5.1.3) unberücksichtigt geblieben. Um sie zu erfüllen, bilden wir gemäß dem *Superpositionsprinzip* die unendliche Reihe

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) = e^{-rt} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \sin(\lambda_k x)$$

und versuchen die Konstanten  $A_k, B_k \in \mathbb{R}$  so zu bestimmen, dass (5.1.3) erfüllt ist. Dies ist gleichbedeutend mit den Entwicklungen

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k x), \quad h(x) = -r g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k B_k \sin(\lambda_k x).$$

Das heißt also, dass wir die Funktionen  $g$  und  $h + r g$  in Fouriersche Reihen entwickeln müssen – allerdings in Sinusreihen. Wenn wir uns  $g$  als ungerade Funktion auf das Intervall  $[-\ell, \ell]$  fortgesetzt denken, sind die Konstanten  $A_k$  gegeben durch die Formeln

$$A_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \sin(\lambda_k x) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin(\lambda_k x) dx,$$

und entsprechend erhält man die  $B_k$  aus den Gleichungen

$$\omega_k B_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} (h(x) + r g(x)) \sin(\lambda_k x) dx.$$

Die Konvergenz der Reihe für die Lösung  $u(t, x)$ , insbesondere aber die für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen nach  $t$  und  $x$ , ist bei beliebigen stetigen Funktionen  $g$  und  $h$  nicht gesichert, aber die Reihen konvergieren jedenfalls im Sinn der Konvergenz von Distributionen gegen die sogenannte *distributionelle Lösung* für das Problem der schwingenden Saite. Dies wird auch noch deutlicher in den folgenden Beispielen. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber an, dass  $\ell = \pi$  ist, was o. B. d. A. getan werden kann, weil wir ja immer die Längeneinheit beliebig festlegen können. Die Eigenwerte  $\lambda_k$  sind in diesem Fall einfach gleich  $k$ , und die Formeln für  $A_k, B_k$  vereinfachen sich entsprechend.

**Beispiel 5.1.1 (Die gezupfte Saite)** Wir stellen uns vor, dass ein Musiker die Saite durch Zupfen an einer Stelle  $x_0 \in (0, \pi)$  zum Klingen bringt. Dies entspricht den Anfangsbedingungen (5.1.3) mit

$$h(x) \equiv 0, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{a}{x_0} x & (0 \leq x \leq x_0) \\ \frac{a}{\pi - x_0} (\pi - x) & (x_0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

Dies ergibt

$$A_k = \frac{2a}{x_0(\pi - x_0)} \frac{\sin(kx_0)}{k^2}, \quad \omega_k B_k = r A_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Frequenzen  $\omega_k$  sind ungefähr gleich  $k$ , sodass sich die  $A_k$  bzw.  $B_k$  ungefähr wie  $k^{-2}$  bzw.  $k^{-3}$  verhalten. Die Reihe für  $u(t, x)$  ist also gleichmäßig konvergent, die für die ersten partiellen Ableitungen ist dies bereits nicht mehr, und die für die zweiten partiellen Ableitungen konvergiert nur noch im Sinne der Konvergenz von Distributionen.

**Beispiel 5.1.2 (Die angeschlagene Saite)** Wird eine Saite, wie in einem Klavier, durch ein Hämmerchen angeschlagen, entspricht dies in idealisierter Form den Anfangsbedingungen

$$g(x) \equiv 0, \quad h(x) = \begin{cases} a & \text{für } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $a > 0$  und  $0 \leq x_0 < x_1 \leq \pi$ . Wenn man dabei das Intervall  $[x_0, x_1]$  verkleinert, sollte man  $a$  entsprechend vergrößern, damit der der Saite zugeführte Gesamtimpuls gleich bleibt, und deshalb sei  $a = (x_1 - x_0)^{-1}$ . Man erhält dann

$$A_k = 0, \quad \omega_k B_k = \frac{-2}{\pi k} \frac{\cos(kx_1) - \cos(kx_0)}{x_1 - x_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lässt man  $x_1$  gegen  $x_0$  konvergieren, so ist der Grenzwert der rechten Seite gleich  $(2/\pi) \sin(kx_0)$ . Dies entspricht der distributionellen Anfangsbedingung  $h(x) = \delta(x - x_0)$ . In diesem Grenzfall sind die Koeffizienten  $B_k$  ungefähr wie  $1/k$ .

Wenn man beide Beispiele vergleicht, stellt man fest, dass bei der gezupften Saite die Amplituden der Obertöne rascher klein werden als bei der angeschlagenen. Dies ist sicher nicht die einzige, aber eine der Erklärungen dafür, dass eine Gitarre weicher klingt als ein Klavier.

### 5.1.2 Die inhomogene Gleichung

Genau wie bei gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungen genügt es auch bei der Schwingungsgleichung, und allgemein bei jeder linearen Differenzialgleichung, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden und danach die zugehörige homogene Gleichung zu untersuchen. In manchen Fällen kann man für eine solche spezielle Lösung mit einem der Form von  $f(t, x)$  entsprechenden Ansatz zum Ziel kommen. Wir zeigen dies im nächsten Beispiel:

**Beispiel 5.1.3** *Die schwingende Saite werde von außen angeregt durch eine periodische Kraft der Form*

$$f(t, x) = A \sin(\lambda_k x) \cos(\omega t),$$

wobei  $\lambda_k$  einer der Eigenwerte der Saite ist, während die Frequenz der Anregung zunächst beliebig sei. Wir stellen uns die Amplitude  $A$  der Anregung als klein vor und fragen einmal nach der Form der Lösung und zum anderen danach, für welche Frequenz  $\omega$  wir eine Lösung mit einer großen Amplitude bekommen.

Da die von uns gefundenen Lösungen der homogenen Gleichung exponentiell abklingen, erwarten wir, dass sich langfristig eine Schwingung der Saite einstellt, welche von der Form her der Anregung entspricht, insbesondere dieselbe Frequenz hat. Um dies zu zeigen, beachten wir dass  $f(t, x)$  gerade der Realteil von  $\tilde{f}(t, x) = A \sin(\lambda_k x) e^{i\omega t}$  ist, und machen für die Lösung den Ansatz

$$u(t, x) = \operatorname{Re} \tilde{u}(t, x), \quad \tilde{u}(t, x) = B \sin(\lambda_k x) e^{i\omega t}.$$

Setzt man  $\tilde{u}(t, x)$  in (5.1.1), mit  $\tilde{f}(t, x)$  an Stelle von  $f(t, x)$ , ein, so ist die Gleichung richtig, wenn

$$(\lambda_k^2 c^2 + 2r\omega i - \omega^2) B = A.$$

Wenn wir  $r > 0$  voraussetzen, lässt sich die Gleichung nach  $B$  auflösen, und es folgt

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{A \sin(\lambda_k x) e^{i\omega t}}{\lambda_k^2 c^2 + 2r\omega i - \omega^2} = \frac{A \sin(\lambda_k x) e^{i(\omega t + \phi)}}{\sqrt{(\lambda_k^2 c^2 - \omega^2)^2 + 4r^2 \omega^2}}.$$

Trennen von Real- und Imaginärteil ergibt dann die partikuläre Lösung

$$u(t, x) = \frac{A \sin(\lambda_k x) \cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{(\lambda_k^2 c^2 - \omega^2)^2 + 4r^2 \omega^2}}.$$

Dies ist also eine phasenverschobene Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  der Anregung und einer Amplitude  $A/\sqrt{(\lambda_k^2 c^2 - \omega^2)^2 + 4r^2 \omega^2}$ .

**Aufgabe 5.1.4** *Bestimme das Maximum der Amplitude der oben gefundenen Lösung in Abhängigkeit von  $\omega$ .*

## 5.2 Das Dirichlet-Problem

Ein sehr wichtiges Problem ist die Bestimmung einer Lösung der Gleichung (in zwei Variablen  $x$  und  $y$ )

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.2.1}$$

welche auf dem Rand eines Kreises um den Nullpunkt mit Radius  $R > 0$  vorgegebene Werte annimmt. Dazu ist es angebracht, Polarkoordinaten einzuführen. Die Gleichung (5.2.1) ist dann von der Form

$$r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\phi\phi} = 0, \quad U(r, \phi) = u(x, y).$$

Die Vorgabe der Werte auf dem Kreisrand entspricht dann der Bedingung

$$U(R, \phi) = f(\phi), \quad (5.2.2)$$

mit einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$ . Der Separationsansatz  $U(r, \phi) = a(r) b(\phi)$  führt auf die Gleichung  $b''(\phi) + \omega^2 b(\phi) = 0$ , welche für  $\omega \neq 0$  die allgemeine Lösung

$$b(\phi) = a e^{-i\omega\phi} + b e^{i\omega\phi}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

hat. Wir benötigen  $2\pi$ -periodische Lösungen, und deshalb fordern wir  $b(0) = b(2\pi)$  und  $b'(0) = b'(2\pi)$ . Das bedeutet zwei Gleichungen für  $a$  und  $b$ , welche genau dann eine nicht-triviale Lösung haben, wenn  $\omega$  eine ganze Zahl ist, und in diesem Fall kann die allgemeine Lösung auch in der Form  $b(\phi) = a \cos(\omega\phi) + b \sin(\omega\phi)$  geschrieben werden. Für  $\omega = 0$  ist die einzige periodische Lösung konstant. Also findet man für jedes  $\omega = n \in \mathbb{N}_0$  periodische Lösungen

$$b_n(\phi) = a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi) \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Für  $a(r)$  erhält man die Gleichung

$$r^2 a''(r) + r a'(r) - n^2 a(r) = 0.$$

Dies ist eine Eulersche Gleichung. Der Ansatz  $b(r) = r^\lambda$  führt auf die Möglichkeiten  $\lambda = \pm n$ , und da wir Beschränktheit von  $b(r)$  im Nullpunkt erreichen wollen, ergibt sich nur die eine Lösung  $b(r) = r^n$ . Also ist das Ergebnis für  $U(r, \phi)$  eine Reihe der Form

$$U(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)),$$

also eine Fourierreihe, und die Koeffizienten sind so zu wählen, dass (5.2.2) gilt.

### 5.3 Die schwingende Kreisscheibe

Dieses Problem entspricht der Bestimmung von  $u(t, x, y)$  mit

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} + 2r u_t &= c^2 \Delta u & (x^2 + y^2 < 1) \\ u(t, x, y) &\equiv 0 & (x^2 + y^2 = 1) \\ u(0, x, y) &= f(x, y) & (x^2 + y^2 \leq 1) \\ u_t(0, x, y) &= g(x, y) & (x^2 + y^2 \leq 1) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)$$

Dabei sind  $f$  und  $g$  gegebene Funktionen, welche auf dem Rand der Einheitskreisscheibe verschwinden, um die Randbedingung nicht zu stören. Die Dämpfungskonstante  $r$  soll wieder nicht-negativ aber klein sein. Wir machen zunächst einen Separationsansatz der Form  $u(t, x, y) = a(t) b(x, y)$  und erhalten die Gleichungen

$$a''(t) + 2r a'(t) + c^2 \lambda^2 a(t) = 0, \quad \Delta b(x, y) + \lambda^2 b(x, y) = 0,$$

mit einer Zahl  $\lambda$ , die wieder reell oder rein imaginär sein kann. Diese Rechnung ist soweit unabhängig davon, ob wir eine schwingende Kreisscheibe oder eine andere zweidimensionale Figur betrachten. Jetzt aber führen wir Polarkoordinaten ein und setzen an  $b(x, y) = b(r) c(\phi)$ . Dies führt dann auf die Gleichungen

$$b''(r) + r^{-1} b'(r) + (\lambda^2 - r^{-2} \mu) b(r) = 0 \quad c''(\phi) + \mu c(\phi) = 0,$$



mit einer beliebigen Konstanten  $\mu \in \mathbb{R}$ . Da wir aber  $2\pi$ -periodische Funktionen  $c(\phi)$  benötigen, ergibt sich  $\mu = n^2$  mit einem  $n \in \mathbb{N}_0$ , und  $c(\phi) = c_1 \cos(n\phi) + c_2 \sin(n\phi)$ , mit beliebigen  $c_j \in \mathbb{R}$  – auch für den Fall  $n = 0$ . Die Differentialgleichung für  $b(r)$  ist fast die Besselsche Gleichung – jedenfalls hat sie eine Lösung

$$J_n(\lambda r) = (\lambda r)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(1+n+m) m!} (\lambda r/2)^{2m}.$$

Da die von uns gesuchten Lösungen im Nullpunkt keine Singularität haben dürfen, ist dies bis auf einen Faktor die einzige zulässige Lösung, und die Randbedingung besagt genau, dass  $\lambda$  eine Nullstelle von  $J_n$  sein muss. Man sieht schnell, dass es keine rein imaginären Nullstellen von  $J_n$  geben kann, und deshalb muss  $\lambda$  reell (und o. B. d. A. positiv) sein. Es ist bekannt, dass es abzählbar unendlich viele solche Nullstellen gibt, und wir numerieren sie so, dass

$$0 < \lambda_{n1} < \lambda_{n2} < \lambda_{n3} < \dots$$

Alles in allem bekommen wir damit Lösungen der Form

$$\begin{aligned} u_{nm}(t, x, y) &= J_n(\lambda_{nm}r) [a_{nm} \sin(n\phi) \sin(c\lambda_{nm}t) + b_{nm} \cos(n\phi) \sin(c\lambda_{nm}t) \\ &\quad + c_{nm} \sin(n\phi) \cos(c\lambda_{nm}t) + d_{nm} \cos(n\phi) \cos(c\lambda_{nm}t)] \end{aligned}$$

mit beliebigen (reellen) Konstanten  $a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm}$ . Die gesuchte Lösung ist dann eine Doppelreihe der Form

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{nm}(t, x, y).$$

Da die Besselfunktion die Orthogonaleigenschaft

$$\int_0^1 J_n(\lambda_{nm}r) J_n(\lambda_{nk}r) = \delta_{nk} J_{n+1}(\lambda_{nm}r) (\neq 0)$$

besitzt, erhält man die unbekanntenen Konstanten aus den Anfangsbedingungen in der gleichen Weise wie bei Fourierreihen; für die genauen Formeln, vergleiche [11].

## 5.4 Die Wärmeleitungsgleichung

Wenn  $u(t, x)$  die Temperatur zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x$  auf einem beidseitig unendlich langen Stab bedeutet, gilt für die Ausbreitung der Wärme die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x),$$

mit einer gegebenen Anfangstemperaturverteilung  $f(x)$ . Der Separationsansatz  $u(t, x) = u(t)v(x)$  ergibt dann

$$u'(t) = -\lambda^2 a^2 u(t), \quad v''(x) = -\lambda^2 v(x),$$

mit einer Konstanten  $\lambda^2$ , die aus physikalischen Gründen positiv sein muss. Also erhält man Lösungen der Form

$$u_\lambda(t, x) = [a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)] e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Da hier Randbedingungen fehlen, erhalten wir für jedes  $\lambda \geq 0$  eine Lösung, und nach dem Superpositionsprinzip der Physik ist die gesuchte Lösung in diesem Fall keine Reihe, sondern ein Integral

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)] e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda.$$

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, muss man setzen

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi, \quad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi.$$

Setzt man dies in die Formel für  $u(t, x)$  ein und vertauscht die Integrationsreihenfolge, so kann man das innere Integral ausrechnen und erhält die folgende Darstellung:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad G(t, x) = \frac{1}{2 a \sqrt{\pi t}} \exp \left[ -\frac{x^2}{4 a^2 t} \right].$$

Beachte, dass dieses Integral viel besser konvergiert als die ursprünglichen Integrale! Die Funktion  $G(t, x)$  ist gerade die Grundlösung oder *Greensche Funktion* der Wärmeleitungsgleichung.

# Index

- Ableitung
  - Rechenregeln, 6
  - von  $\mathbb{X}$ -wertigen Funktionen, 5
- Anfangsbedingung
  - bei PDGl, 52
- Anfangswertproblem, 10
- asymptotisch stabil, 19
- autonom, 22
- AWP, 10, 28
  
- Bahn, 23
- Besselfunktion, 50
  - Integraldarstellung, 51
- Besselsche Gleichung, 50
  
- $C$ , 26
- charakteristisches Polynom, 47
- $C^{(n)}$ , 27
  
- $D$ , 27
- Differentialgleichung
  - Besselsche, 50
  - Eulersche, 47
  - hypergeometrische, 48
- Differentialoperator, 26
- Differenzierbarkeit
  - von  $\mathbb{X}$ -wertigen Funktionen, 5
- Dirichlet-Problem, 55
- diskret, 29
  
- Eigenfunktion, 27
- Eigenraum, 27
- Eigenschwingungen, 53
- Eigenwert, 27
  - halbeinfacher, 20
- Eigenwertaufgabe, 25
- Eigenwertbedingung, 42
- einfach zusammenhängend, 39
- Eulersche Differentialgleichung, 47
- EWA, 25
  
- Floquetscher Exponent, 47
- Fortsetzbarkeit, 37
- Frobenius-Methode, 45
- Fuchssches System, 40
- Fundamentalabschätzung, 7
- Funktion
  - Besselsche, 50
  - Greensche, 30
  - hypergeometrische, 49
  - zulässige, 10
  
- Gewichtsfunktion, 33
- Greensche Funktion, 30
- Greenscher Operator, 31
- Grönwallsche Ungleichung, 10
  
- halbeinfach, 20
- holomorph
  - stark/schwach, 14
- homogene Gleichung, 52
- homotope Kurven, 38
- hypergeometrische Differentialgleichung, 48
- hypergeometrische Funktion, 49
  
- Integral, 7
  - Berechnung, 8
  
- $\mathcal{L}_2$ , 26
- $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ , 5
- Lipschitz-stetig, 16
  
- modulo 1 gruppiert, 43
- Monodromiematrix, 40
- Monodromiesatz, 39
  
- nicht entartet, 29
- nicht-triviales Intervall, 5
  
- Pochhammer-Symbol, 48
- Poincaréscher Rang, 40
- Potenzreihenansatz, 15
  
- Räuber-Beute-Modell, 23
- Randbedingungen, 26
- Randbedingungen, 52
- Rang, 40
- regulär-singulär, 40
- reguläre Singularität, 40
- Riemann-Summe, 7
  
- Satz
  - Monodromie-, 39
  - von Picard-Lindelöf, 11
- schwingende Saite, 52
- selbstadjungiert, 27

Separationsansatz, 52  
singulärer Punkt, 40  
Singularität  
    erster/zweiter Art, 40  
    bei skalaren Gleichungen, 44  
    reguläre, 40  
Störung, 20  
stabil, 19  
Stammfunktion  
    von  $\mathbb{X}$ -wertigen Funktionen, 6  
Sturm-Liouville, 27  
  
vom Fuchsschen Typ, 44  
  
Wärmeleitungsgleichung, 57  
  
 $\mathbb{X}$ -wertige Funktion, 5  
    Ableitung, 5  
    Integral, 7  
    Riemann-Summe, 7  
 $\mathbb{X}, \mathbb{X}'$ , 5  
  
zulässige Funktion, 10