Vorlesungsmanuskript zur

Funktionentheorie II

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2007/08

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Unendliche Produkte

Die Theorie der unendlichen Produkte ist weitgehend analog zu der von Reihen - allerdings muss man die Definition der Konvergenz richtig fassen, um auszuschließen, dass ein Produkt bereits (gegen den Wert 0) konvergiert, wenn ein Faktor verschwindet, unabhängig von der Größe der übrigen Faktoren. Außerdem möchte man sicher stellen, dass der Wert eines Produktes gleich 0 ist genau dann, wenn wenigstens einer der Faktoren verschwindet. Im Prinzip kann man kurz sagen, dass ein unendliches Produkt genau dann konvergiert, wenn die Reihe aus den Logarithmen der Faktoren konvergent ist, und der Wert der Reihe der Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Wertes des Produkts.

1.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 1.1.1 (Unendliches Produkt) *Für eine Folge* $(f_\nu)_{\nu=k}^{\infty}$ *heißt die* Folge der Partialprodukte $(\Pi_m := \prod_{\nu=k}^{m} f_\nu)_{m=k}^{\infty}$ *ein* unendliches Produkt *mit den* Faktoren f_ν*, und wir schreiben auch*

$$\prod_{\nu=k}^{\infty} f_\nu\,, \qquad \text{oder} \quad \prod_{\nu\geq k} f_\nu\,, \qquad \text{oder} \quad \prod f_\nu\,.$$

Das unendliche Produkt heißt konvergent*, falls es ein* $m \geq k$ *gibt, für welches die Folge* $(\Pi_{mn} := \prod_{\nu=m}^{n} f_\nu)_{n=m}^{\infty}$ *für* $n \longrightarrow \infty$ *einen Grenzwert* $g_m \neq 0$ *hat. In diesem Fall ist die Zahl* $g := g_m\,\Pi_m$ *nicht von* m *abhängig und heißt* Grenzwert *oder* Wert *des Produktes. Wir schreiben dann kurz*

$$g \;=\; \prod_{\nu=k}^{\infty} f_\nu \;\left(\; = \;\prod_{\nu\geq k} f_\nu \;=\; \prod f_\nu \;\right).$$

Lemma 1.1.2 *Gegeben sei ein unendliches Produkt* $\prod_{\nu=k}^{\infty} f_\nu$*.*

(a) *Falls das Produkt konvergiert, so konvergieren auch alle Produkte der Form* $\prod_{\nu=m}^{\infty} f_\nu$ *mit* $m \geq k$*, und es gilt*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \prod_{\nu=m}^{\infty} f_\nu \;=\; 1\,, \qquad \lim_{m\longrightarrow\infty} f_m \;=\; 1\,. \tag{1.1.1}$$

(b) *Falls das Produkt gegen den Wert* g *konvergiert, so ist* $g = 0$ *genau dann, wenn mindestens ein Faktor* $f_\nu = 0$ *ist.*

Beweis: Aus der Konvergenz folgt, dass höchstens endlich viele der Faktoren f_ν verschwinden können, und daraus folgt leicht die Konvergenz der Produkte $\prod_{\nu=m}^{\infty} f_\nu$ mit $m \geq k$. Wenn g_m deren Wert bezeichnet, so ist $g_m \neq 0$ für alle $m \geq m_0$, und es folgt dass $\lim_{n\longrightarrow\infty} g_m\,/\,\Pi_{mn} = 1$ ist. Weil $g_m\,/\,\Pi_{mn} = \prod_{\nu=n}^{\infty} f_\nu$

und $f_n = g_n/g_{n+1}$ ist, folgt (a). Teil (b) ergibt sich aus $g = g_m \prod_{\nu=k}^{m-1} f_\nu$ und der Tatsache, dass $g_m \neq 0$ ist für alle $m \geq m_0$. □

Im Folgenden schreiben wir oft die Faktoren eines Produktes in der Form $f_\nu = 1 + a_\nu$, und dann sagt das obige Lemma, dass die Bedingung $a_\nu \longrightarrow 0$ notwendig für die Konvergenz eines unendlichen Produktes ist.

Beispiel 1.1.3 (a) *Es gilt offenbar*

$$\prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - 1/\nu^2\right) = \frac{\left(\prod\limits_{\nu=2}^{n} (\nu - 1)\right) \left(\prod\limits_{\nu=2}^{n} (\nu + 1)\right)}{\left(\prod\limits_{\nu=2}^{n} \nu\right)^2} = (1 + 1/n)/2 \longrightarrow 1/2 \qquad (n \longrightarrow \infty),$$

und deshalb ist das unendliche Produkt $\prod_{\nu=2}^{\infty} (1 - 1/\nu^2)$ konvergent gegen 1/2. Auch das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - 1/\nu^2)$ ist konvergent, aber gegen 0. Das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - (-1)^\nu)$ dagegen ist divergent.

(b) *Es ist*

$$\prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - 1/\nu\right) = \frac{\prod\limits_{\nu=2}^{n} (\nu - 1)}{\prod\limits_{\nu=2}^{n} \nu} = 1/n \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty),$$

und deshalb ist das unendliche Produkt $\prod_{\nu=2}^{\infty} (1 - 1/\nu)$ nicht konvergent.

(c) *In Verallgemeinerung von* (b) *zeigen wir:* Wenn $1 - a_\nu > 0$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \infty$ ist, dann ist das Produkt $\prod_{\nu=2}^{\infty} (1 - a_\nu)$ nicht konvergent.
Beweis: *Aus der Ungleichung $t \leq \mathrm{e}^{t-1}$ folgt $0 < \prod_{\nu=2}^{n} (1 - a_\nu) \leq \exp[-\sum_0^n a_\nu] \longrightarrow 0$, und daher gilt die Behauptung.*

1.2 Produkte von Funktionen

Im Folgenden sei G immer ein Gebiet in $\mathbb{C}$, und die Funktionen f_ν, für $\nu \geq 0$, seien in G holomorph.

Definition 1.2.1 *Das unendliche Produkt $\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ heißt* auf G kompakt konvergent, *wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein m_0 gibt, für welches die Folge $(\prod_{\nu=m_0}^{n} f_\nu)$ auf K gleichmäßig gegen eine auf K nullstellenfreie Funktion g_m konvergiert. Insbesondere ist dann für alle $z \in G$ das Produkt $\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ im oben definierten Sinn konvergent, was wir als* punktweise Konvergenz *bezeichnen wollen.*

Lemma 1.2.2 *Wenn ein Produkt $\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ holomorpher Funktionen auf G kompakt konvergiert, dann ist der Wert des Produktes eine auf G holomorphe Funktion, und die Folge $(f_\nu(z))$ der Faktoren sowie die Folge der Funktionen $g_n(z) = \prod_n^{\infty} f_\nu(z)$ konvergieren auf G kompakt gegen die Funktion $\equiv 1$.*

Beweis: Der erste Teil der Aussage ist klar nach einem Satz aus Analysis IV, und der zweite Teil ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 1.1.2. □

1.3 Normale Konvergenz von Produkten und Reihen

Im Folgenden sei wieder G immer ein Gebiet in $\mathbb{C}$, und die Funktionen $f_\nu(z) = 1 + a_\nu(z)$, $\nu \geq 1$ seien für $\nu \geq 0$ in G holomorph.

Definition 1.3.1 *Die Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu(z)$ heißt in G* normal konvergent*, falls für jedes Kompaktum $K \subset G$ und $\|a\|_K := \sup_K |a(z)|$ gilt $\sum_{\nu=0}^\infty \|a_\nu\|_K < \infty$. Im Sinn der Funktionalanalysis bedeutet dies die absolute Konvergenz der Reihe im Sinn der Norm $\|\cdot\|_K$. Ist dies der Fall, dann nennen wir auch das Produkt $\prod_{\nu=0}^\infty (1+a_\nu(z))$ in G normal konvergent. Beachte dass jede Umordnung einer normal konergenten Reihe, und damit auch des Produktes, wieder normal konvergiert. Es ist aber momentan noch nicht klar, ob ein normal konvergentes Produkt kompakt, oder auch nur punktweise konvergiert; dies wird aber gleich bewiesen.*

Aufgabe 1.3.2 *Zeige: Wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty \log(1 + a_\nu(z))$ auf einem Kompaktum $K \subset G$ gleichmäßig konvergiert, so tut dies auch das Produkt $\prod_{\nu=0}^\infty (1 + a_\nu(z))$, und es gilt*

$$\prod_{\nu=0}^\infty (1 + a_\nu(z)) \;=\; \exp\Big[\sum_{\nu=0}^\infty \log(1 + a_\nu(z))\Big]\,.$$

Satz 1.3.3 (Umordnungssatz) *Für G und a_ν wie oben sei das Produkt $\prod_{\nu=0}^\infty (1 + a_\nu(z))$ in G normal konvergent. Dann ist für jede Bijektion $\pi : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ das umgeordnete Produkt $\prod_{\nu=0}^\infty (1 + a_{\pi(\nu)})$ in G kompakt konvergent, und sein Wert ist von π unabhängig.*

Beweis: Sei $K \subset G$ kompakt, dann folgt aus der Definition der normalen Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(a_\nu(z))$ auf K gegen die Nullfunktion. Daher existiert ein ν_0 so, dass $|f_\nu(z)| \leq 1/2$ ist für alle $z \in K$ und alle $\nu \geq \nu_0$. Also können wir den Hauptzweig von $\log(1 + a_\nu(z))$ mittels der Potenzreihe definieren und erhalten durch deren Abschätzung die Ungleichung

$$|\log(1 + a_\nu(z))| \;\leq\; 2\,|f_\nu(z)| \qquad \forall\, z \in K\,.$$

Es reicht aus, den Satz für alle Bijektionen, welche die ersten ν_0 Indizes ungeändert lassen, zu beweisen, denn eine solche unterscheidet sich von einer allgemeinen nur durch eine Permutation von endlich vielen Indizes, und diese hat keinen Einfluss auf die Konvergenz von Reihen bzw. Produkten. Sei also jetzt π eine solche Bijektion. Dann ist die Reihe $\sum_{\nu=\nu_0}^\infty \log(1 + a_\pi(\nu)(z))$ nach dem Majorantenkriterium auf K absolut und gleichmäßig konvergent, und nach Aufgabe 1.3.2 folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\prod_{\nu=\nu_0}^\infty (1 + a_\pi(\nu)(z))$. Da der Wert der Reihe wegen ihrer absoluten Konvergenz nicht von π abhängt, gilt dasselbe auch für das Produkt. □

Satz 1.3.4 (Nullstellensatz) *Unter den Voraussetzungen des Umordnungssatzes sei $f(z)$ der Wert des Produktes. Dann ist die Nullstellenmenge von f die Vereinigung der Nullstellenmengen der Faktoren f_ν, und es gilt weiter: Ist z_0 Nullstelle von f der Ordnung n, so ist z_0 Nullstelle der f_ν der Ordnungen n_ν, wobei nur endlich viele der n_ν positiv sind, und $n = \sum_\nu n_\nu$.*

Beweis: Nach Definition der Konvergenz gibt es zu jedem $z_0 \in G$ ein ν_0 so, dass $f_\nu(z_0) \neq 0$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

1.4 Die logarithmische Ableitung

Definition 1.4.1 *Sei f nicht identisch Null und holomorph in einem Gebiet G. Dann ist $f'(z)/f(z)$ meromorph in G, d. h., jede Stelle in G ist entweder ein Holomorphiepunkt oder ein Pol der Funktion, und $f'(z)/f(z)$ heißt* logarithmische Ableitung *von f.*

Satz 1.4.2 (Differentiationssatz) *Sei G ein Gebiet, seien f_ν holomorph in G, und sei das Produkt $f(z) = \prod_{\nu=0}^\infty f_\nu(z)$ in G normal konvergent. Dann ist*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \sum_{\nu=0}^\infty \frac{f_\nu'(z)}{f_\nu(z)}\,, \qquad z \in G \setminus N\,, \quad N \;:=\; \{z \in G : f(z) = 0\}\,, \tag{1.4.1}$$

wobei die Reihe in $G \setminus N$ normal konvergiert.

Beweis: Zu einem Kompaktum $K \in G$ sei m so, dass $g_n(z) = \prod_n^\infty f_\nu(z)$ auf K nullstellenfrei ist, und dann konvergiert die Folge $g_n(z)$ nach Lemma 1.2.2 auf K gleichmäßig gegen 1. Daraus folgt durch Verwendung der Cauchyschen Integralformel für die Ableitung die kompakte Konvergenz von $(g_n'(z)$ auf dem offenen Kern O von K gegen die Nullfunktion, und wegen

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f_\nu'(z)}{f_\nu(z)} \;+\; \frac{g_n'(z)}{g_n(z)}$$

ist nur noch die normale Konvergenz der Reihe (1.4.1) zu zeigen. Daher sei jetzt K ein Kopaktum in $G\setminus N$. Dort konvergiert die Folge $(f_\nu(z))$ gleichmäßig gegen 1, und daher gibt es ein ν_0 so, dass $|f_\nu(z)| \ge 1/2$ ist für alle $\nu \ge \nu_0$ und alle $z \in K$. Für $f_\nu(z) = 1 + a_\nu(z)$ geht die Folge $(a_\nu(z))$ auf K gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Sei $\delta > 0$ so klein, dass

$$L \;:=\; \bigcup_{z\in K} \overline{U_\delta(z)} \;\subset G \setminus N\,.$$

Mit der Cauchyschen Integralformel für die Ableitung ergibt sich dann dass $\|a_\nu'\|_K \le M\,\|a_\nu\|_L$ für ein gengend großes M, welches nicht von ν abhängt. Daraus und der Tatsache, dass $\sum_0^\infty \|a_\nu\|_L < \infty$ ist, folgt dann die Behauptung. □

1.5 Die Produktdarstellung der Sinusfunktion

Als ein erstes wichtiges Beispiel der sogenannten Produktdarstellung ganzer Funktionen zeigen wir:

Satz 1.5.1 *Das unendliche Produkt $\prod_1^\infty (1 - z^2/\nu^2)$ ist in $\mathbb{C}$ normal konvergent, und es gilt*

$$\sin(\pi z) \;=\; \pi\, z \prod_{\nu=1}^\infty (1 - z^2/\nu^2) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.5.1}$$

Beweis: Die normale Konvergenz ist klar. Wir definieren $f(z) := \pi\, z\, \prod_1^\infty (1 - z^2/\nu^2)$ und folgern aus dem Differentiationssatz dass

$$c(z) \;:=\; \frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{\nu=1}^\infty \frac{2\,z}{z^2 - \nu^2} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,.$$

Die Funktion $c(z)$ ist offenbar ungerade und meromorph (in $\mathbb{C}$), mit Polen an den Stellen $z_m = m \in \mathbb{Z}$ und zugehörigen Hauptteilen $(z-m)^{-1}$. Aus

$$c_n(z) \;:=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,z}{z^2-\nu^2} \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{z+\nu}$$

folgt dass $c_n(z) + c_n(z+1/2) - 2\,c_{2n}(2z) = 2/(2\,z+2\,n+1)$, woraus für $n \longrightarrow \infty$ folgt

$$c(z) \;+\; c(z+1/2) \;=\; 2\,c(2\,z) \qquad \forall\; z \quad \text{mit} \quad 2\,z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,.$$

Die Funktion $\pi\,\cot(\pi\,z)$ ist ebenfalls ungerade, hat dieselben Pole und Hauptteile, und erfüllt die gleiche Funktionalgleichung. Daher ist die Differenz $d(z)$ eine ganze Funktion, ungerade, und erfüllt genauso die Gleichung $d(z) + d(z+1/2) = 2\,d(2z)$. Falls $d(z) \not\equiv 0$ wäre, gäbe es nach dem Maximumprinzip ein z_0 mit $|z_0| = 2$, für welches $|d(z)| < |d(z_0)|$ sein müsste für alle z mit $|z| < 2$. Mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus $|d(z_0/2) + d((z_0+1)/2) < 2\,|d(z_0)|$, was der Funktionalgleichung widerspricht. Somit ist also $f'(z)/f(z) = \pi\,\cot(\pi z)$, was die logarithmische Ableitung von $\sin(\pi z)$ ist. Daraus folgt aber für ein $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung $f(z) = c\,\sin(\pi z)$, und da gilt

$$\lim_{z\longrightarrow 0} \frac{f(z)}{\pi z} \;=\; 1 \;=\; \lim_{z\longrightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\,,$$

muss $c = 1$ sein. $\square$

Korollar zu Satz 1.5.1 (Wallis-Produkt) *Für $z = 1/2$ folgt aus der Produktdarstellung der Sinusfunktion, dass*

$$\frac{\pi}{2} \;=\; \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu)^2}{(2\nu-2)\,(2\nu+1)}\;.$$

Aufgabe 1.5.2 (Produktdarstellung der Kosinusfunktion)
Benutze die Identität $\sin(\pi z)\,\cos(\pi z) = \sin(2\pi z)/2$ und die Produktdarstellung der Sinusfuktion, um zu zeigen dass

$$\cos(\pi z) \;=\; \prod_{\nu=1}^{\infty} \Big(1 - z^2/(\nu-1/2)^2\Big) \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}\,.$$

1.6 Die Produktdarstellung der Gammafunktion

Eine weitere wichtige Formel soll jetzt gezeigt werden. Dazu benötigen wir ein Produkt, dessen Konvergenz wir jetzt zeigen:

Proposition 1.6.1 *Das Produkt $\prod_1^\infty (1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu}$ ist in $\mathbb{C}$ normal konvergent. Die Funktion*

$$H(z) \;=\; z\,\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu} \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}$$

ist also ganz und hat die Nullstellen $z_\mu = -\mu$, mit $\mu \in \mathbb{N}_0$, welche alle einfach sind. Weiter ist

$$-H(z)\,H(-z) \;=\; \frac{z}{\pi}\,\sin(\pi z)\,, \qquad H(1) \;=\; \mathrm{e}^{-\gamma}\,, \qquad \gamma \;:=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} \Big(\,\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu \;-\; \log n\Big)\,.$$

Beweis: Aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt für alle w im abgeschlossenen Einheitskreis die Ungleichung $|1-(1-w)\,\mathrm{e}^{w}| \le |w|^2$. Daraus ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ und $|z| \le n$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \sup_{|z|\le n} \Big|1-(1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu}\Big| \quad \le \quad |z|^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-2} \; < \; \infty\,.$$

Daher konvergiert das Produkt wie behauptet. Durch Multiplikation der Produktdarstellungen von $H(z)$ und $H(-z)$ und Vergleich mit der Darstellung der Sinusfunktion folgt die erste der Identitäten. Aus

$$H(1) \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (1+1/\nu)\;\exp\Big[\,-\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu\,\Big] \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} \exp\Big[\,\log(n+1)-\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu\,\Big]$$

und der Folgenstetigkeit von Exponentialfunktion und Logarithmus ergibt sich die Existenz von

$$\gamma \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} \Big(\,\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu \;-\; \log n\Big) \;=\; -\lim_{n\longrightarrow\infty} \exp\Big[\,\log(n/(n+1))+\log(n+1)-\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu\,\Big]\,,$$

was noch zu zeigen war. □

Definition 1.6.2 *Die oben definierte Zahl* γ *heißt* Eulersche Konstante. *Ihr Wert ist* $\gamma = 0,5772....$ *Wir definieren weiter*

$$\Delta(z) \;=\; \mathrm{e}^{\gamma z}\, H(z)\,, \qquad \Gamma(z) \;=\; \frac{1}{\Delta(z)}\,,$$

wobei aus der vorangegangenen Proposition folgt, dass Δ *ganz ist. Dagegen ist* Γ *meromorph in* $\mathbb{C}$*, mit Polen erster Ordnung an den Stellen* $z_\mu = -\mu$*, mit* $\mu \in \mathbb{N}_0$*. Weitere Eigenschaften folgen, und insbesondere zeigen wir, dass die hier gegebene Definition der Gammafunktion mit der sonst üblichen durch die Integraldarstellung übereinstimmt.*

Satz 1.6.3 *Die oben definierte Funktion* $\Gamma(z)$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\quad \mathrm{Res}_{z=-n}\,\Gamma(z) \;=\; \dfrac{(-1)^n}{n!}\,, \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}_0\;.$

(b) $\quad \Gamma(z) \;=\; \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{n!\,n^z}{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\,, \qquad \forall\; -z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0\;.$

(c) $\quad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) \;=\; \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\,, \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\;.$

(d) $\quad \Gamma(\overline{z}) \;=\; \overline{\Gamma(z)}\,, \qquad \forall\; -z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0\;.$

(e) $\quad \Gamma(x) \;>\; 0\,, \qquad \forall\; x > 0\;.$

(f) $\quad \Gamma(1+z) \;=\; z\,\Gamma(z)\,, \qquad \forall\; -z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0\;.$

(g) $\quad \Gamma(z) \;=\; \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt\,, \qquad \forall\; z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Re}\; z > 0\;.$

Beweis: Aus

$$z\prod_{\nu=1}^{n} (1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu} \;=\; \frac{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}{n!\,n^z}\;\exp[z\,(\log n - \sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu)]$$

ergibt sich (b), und daraus folgt $z\,\Gamma(z)/\Gamma(1+z) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(z+n+1)/n = 1$, also (f). Hieraus wiederum schließt man für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(z+n)\;\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n+1)} \;\longrightarrow\; \frac{\Gamma(1)}{(-n)\cdot\ldots\cdot(-1)} \qquad \text{für} \quad z \longrightarrow -n\,,$$

und da $\Gamma(1) = 1/\Delta(1) = 1$, folgt (a). Die sogenannte *Ergänzungsformel* (c) folgt aus den Produktdarstellungen der Kehrwerte der drei Terme, und (d), (e) ergeben sich aus (b) und der Tatsache, dass Γ als Kehrwert einer ganzen Funktion keine Nullstellen haben kann. Schließlich zeigt man durch Induktion über n für $n \geq 1$

$$\int_0^n t^{z-1}\,(1 - t/n)^n\,dt \;=\; n^z \int_0^1 u^{z-1}\,(1-u)^n\,du \;=\; \frac{n!\,n^z}{z\,(z+1)\cdot \ldots \cdot (z+n)}\,.$$

Die Folge $(1 - t/n)^n$ ist für $n \geq t$ monoton wachsend und strebt gegen e^{-t}, und dann zeigt z. B. der Satz von Beppo-Levi, für $z = x > 0$, dass man Grenzwert und Integral vertauschen darf. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen zeigt dann die Gültigkeit von (g), da das Integral in der rechten Halbebene absolut und kompakt konvergent ist und also eine holomorphe Funktion darstellt. $\square$

Kapitel 2

Ganze Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen

In diesem Kapitel wollen wir die Existenz von ganzen Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen zeigen. Da sich diese Nullstellen nirgends in $\mathbb{C}$ häufen können (außer im trivialen Fall der Nullfunktion), sei im Folgenden immer eine feste Folge $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ betrachtet, deren Glieder alle $\neq 0$ sein sollen (da wir häufig ihre Kehrwerte bilden wollen), und die gegen Unendlich gehen sollen. Dabei können wir noch o. B. d. A. annehmen, dass eventuell gleiche Folgenglieder hintereinander stehen mögen, und dass die Folge ihrer Beträge monoton wachsend sei. Dies wird aber meistens keine Rolle spielen.

2.1 Weierstraß-Faktoren

Definition 2.1.1 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion*

$$E_n(z) \;=\; (1-z)\,\mathrm{e}^{p_n(z)}\,, \qquad p_n(z) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu/\nu\,, \tag{2.1.1}$$

Weierstraß-Faktor *der Ordnung n. Wir nennen $p_n(z)$ auch n-tes* Weierstraß-Polynom*.*

Bemerkung 2.1.2 *Beachte dass $p_n(z)$ gerade das n-te Taylorpolynom von $-\log(1-z)$ ist, so dass für $|z|<1$ die Konvergenz von $E_n(z)$ gegen die Einsfunktion folgt. Vergleiche dazu auch die unten stehenden Abschätzungen.*

Lemma 2.1.3 *Für die oben definierten Weierstraß-Faktoren gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}$:*

(a) $E_n'(z) \;=\; -z^n\,\mathrm{e}^{p_n(z)}\,,$

(b) $E_n(z) \;=\; 1 \;-\; \displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu\, z^\nu\,, \qquad a_\nu \;>\; 0 \qquad \forall\,\nu \geq n+1\,, \quad \displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \;=\; 1\,,$

(c) $|E_n(z) \;-\; 1| \;\leq\; |z|^{n+1}$ *falls $|z| \leq 1$ ist.*

Beweis: Teil (a) folgt durch Nachrechnen, und da $E_n(0)=1$ ist, folgt dass in der Potenzreihenentwicklung von $E_n(z)$ die Koeffizienten $a_1 = \ldots = a_n = 0$ sind. Weil alle Koeffizienten der Potenzreihe für $\mathrm{e}^{z^\nu/\nu}$ nicht-negativ sind, folgt mit Induktion über n aus der Faltungsformel dass die übrigen Koeffizienten a_ν alle positiv sind. Weil $E_n(1)=0$ ist, folgt die letzte Beziehung in (b), und daraus folgt (c). □

2.2 Der Weierstraßsche Produktsatz

Lemma 2.2.1 *Wenn die Zahlen $k_\nu \in \mathbb{N}_0$ so sind dass*

$$\forall\, r > 0 : \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} |r/z_\nu|^{k_\nu+1} \;<\; \infty\,,$$

dann konvergiert das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{k_\nu}(z/z_\nu) \;=\; \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z/z_\nu)\; \exp\,[\, \sum_{\mu=1}^{k_\nu} (z/z_\nu)^\mu \,] \tag{2.2.1}$$

normal in $\mathbb{C}$, und sein Wert ist eine ganze Funktion, deren Nullstellen genau die Zahlen z_ν sind.

Beweis: Für $r > 0$ und $|z| \le r$, sowie ν_0 so, dass $|z_\nu| \ge r$ für $\nu \ge \nu_0$ gilt, folgt

$$|1 \;-\; E_{k_\nu}(z/z_\nu)| \;\le\; \Big(r/|z_\nu|\Big)^{k_\nu+1} \qquad \forall\, \nu \ge \nu_0\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Die Nullstellenmenge einer nicht trivialen ganzen Funktion f kann leer wie bei $f(z) = \mathrm{e}^z$, oder eine endliche Menge wie im Fall eines Polynoms, oder eine abzählbar unendliche Menge wie bei $f(z) = \sin z$ sein. Im letzten Fall ist ∞ der einzige Häufungspunkt der Nullstellenmenge, und wir sagen kurz so, dass die Nullstellenmenge einer ganzen Funktion $f(z) \not\equiv 0$ immer eine *diskrete Menge* ist. Dass *jede* diskrete Menge als Nullstellenmenge auftreten kann, und dass jede dieser Nullstellen auch eine beliebig vorgegebene Vielfachheit haben kann, ist für eine unendliche Menge nicht trivial, soll aber jetzt gezeigt werden. Dazu sei $N \subset \mathbb{C}$ diskret, also eine abzählbar unendliche Menge ohne endlichen Häufungspunkt, und $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ so, dass genau dann $v(z) = 0$ ist wenn $z \notin N$ liegt. Die Zahl 0 kann in N liegen oder auch nicht, und wir assoziieren mit N und v eine Folge $(z_\nu)_{\nu\ge1}$ so, dass alle $z_\nu \in N \setminus \{0\}$ sind, und dass jedes $z \in N \setminus \{0\}$ genau $v(z)$-mal als Folgenglied auftritt. Wir können uns o. B. d. A. vorstellen, dass die Folge $(|z_\nu|)_{\nu\ge1}$ monoton wächst, und dass insbesondere gleiche Glieder z_ν unmittelbar hintereinanderkommen.

Satz 2.2.2 (Weierstraßscher Produktsatz) *Zu N und v wie oben beschrieben gibt es eine ganze Funktion f, die genau die Zahlen $z \in N$ als Nullstellen der Vielfachheit $v(z)$ hat. Ist (z_ν) eine Folge wie oben beschrieben, dann hat z. B.*

$$f(z) \;=\; z^{v(0)} \prod_{\nu=1}^{\infty} E_{k_\nu}(z/z_\nu) \;=\; z^{v(0)} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z/z_\nu)\; \exp\,[\, \sum_{\mu=1}^{k_\nu} (z/z_\nu)^\mu \,] \tag{2.2.2}$$

die gewünschte Eigenschaft, wobei die Zahlen k_ν immer so gewählt werden können, dass das Produkt in $\mathbb{C}$ normal konvergiert.

Beweis: Sei zu $r > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|z_\nu| > 2\,r$ gilt sofern nur $\nu \ge m+1$ ist. Dann folgt

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \big|\, r/z_\nu \,\big|^\nu \;<\; \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (1/2)^\nu \;<\; \infty\,,$$

und deshalb ist Lemma 2.1.3 mit $k_\nu = \nu - 1$ anwendbar und liefert die Behauptung. □

Bemerkung 2.2.3 *Die im Beweis des letzten Satzes gewählte Folge von Zahlen k_ν ist* nicht *optimal, was hier aber keine Rolle spielt. Außerdem ist klar, dass es nicht nur eine ganze Funktion f gibt, welche die im Satz vorgegebenen Nullstellen besitzt, denn man kann natürlich f immer mit einer ganzen Funktion h* ohne Nullstellen *multiplizieren. Wenn umgekehrt g eine weitere ganze Funktion mit denselben Nullstellen derselben Vielfachheiten wie f ist, dann hat die Funktion $h(z) = g(z)/f(z)$ an den Nullstellen von f immer hebbare Singulariäten und ist deshalb eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Wie die allgemeinste ganze Funktion ohne Nullstellen aussieht, ist Inhalt des nächsten Lemmas.*

Lemma 2.2.4 (Ganze Funktionen ohne Nullstellen) *Zu jeder ganzen Funktion h ohne Nullstellen gibt es eine andere ganze Funktion a so, dass $h(z) = \mathrm{e}^{a(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Umgekehrt ist bei gegebener ganzer Funktion a die Funktion $h(z) = \mathrm{e}^{a(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, ganz und hat keine Nullstellen.*

Beweis: Es genügt, die eine Richtung zu zeigen. Sei also h gegeben. Dann ist auch die logarithmische Ableitung h'/h ganz, und da das Kurvenintegral in $\mathbb{C}$ wegunabhängig ist, folgt für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ dass

$$a(z) \;:=\; a \;+\; \int_0^z \frac{h'(w)}{h(w)}\,dw \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

eine weitere ganze Funktion ist. Man rechnet nach, dass die Ableitung von $h(z)\,\mathrm{e}^{-a(z)}$ die Nullfunktion ist, so dass die Funktion selber konstant ist. Wenn man jetzt $a = \log(h(0))$ wählt, wobei man einen beliebigen Zweig der Logarithmusfunktion benutzen kann, dann folgt dass $h(z) \equiv \mathrm{e}^{a(z)}$ ist, was zu zeigen war. □

2.3 Quotienten ganzer Funktionen

Ein Quotient ganzer Funktionen ist immer eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion. Der nächste Satz zeigt die Umkehrung:

Satz 2.3.1 *Zu jeder in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $h \not\equiv 0$ gibt es immer zwei ganze Funktionen f und g ohne gemeinsame Nullstellen, so dass $h(z) = f(z)/g(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$, welche keine Nullstellen des Nenners sind. Insbesondere ist z_0 eine Nullstelle von f bzw. g der Vielfachheit v genau dann, wenn z_0 Nullstelle bzw. Polstelle von h der Vielfachheit bzw. der Ordnung v ist.*

Beweis: Die Nullstellen- und die Polstellenmenge von h sind zwei diskrete, abzälbare und disjunkte Mengen in $\mathbb{C}$, und daher gibt es ganze Funktionen f und g, für welche die zweite Aussage des Satzes richtig ist (auch falls eine der beiden Mengen endlich ist, denn dann kann die entsprechende ganze Funktion als ein Polynom gewählt werden). Die Funktion $\tilde{h} = f/g$ ist dann ebenfalls meromorph und hat die gleichen Nullstellen und Pole mit denselben Vielfachheiten bzw. Ordnungen wie h. Also ist $F := h/\tilde{h}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen, und $h = f\,F/g$. Also gilt der Satz mit $f\,F$ an Stelle von f. □

Bemerkung 2.3.2 *In der Sprache der Algebra ist die Menge der ganzen Funktionen ein Integritätsbereich, d. h., ein kommutativer Ring mit Einselement ohne Nullteiler.* Satz 2.3.1 *besagt genau dass die meromorphen Funktionen der zugehörige Quotientenkörper sind.*

2.4 Existenz von Wurzeln ganzer Funktionen

Wir wollen untersuchen, wann die n-te Wurzel einer ganzen Funktion wieder ganz ist; dass dies nicht immer so ist, sieht man an dem trivialen Beispiel $\sqrt[n]{z}$.

Satz 2.4.1 *Für jede ganze Funktion und jedes $n \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt eine ganze Funktion g mit $f = g^n$.*

(b) *Jede Nullstelle von f hat eine Vielfachheit, welche durch n teilbar ist.*

Beweis: Wenn (a) gilt, ist (b) offenbar erfüllt. Umgekehrt gibt es nach Satz 2.2.2 zu gegebenem f, für welches (b) richtig ist, eine ganze Funktion h, welche die gleichen Nullstellen wie f, aber mit Vielfachheiten $v(z)/n$ hat. Dann ist f/h^n eine ganze Funktion ohne Nullstellen, also von dern Form $\mathrm{e}^{a(z)}$ mit einer ganzen Funktion a. Mit $g(z) = h(z)\,\mathrm{e}^{a(z)/n}$ folgt die Behauptung. □

2.5 Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist eine sogenannte *doppeltperiodische Funktion*. Sie hängt von zwei komplexen Parametern ω_1, ω_2 ab, und wenn wir diese Zahlen als Punkte in $\mathbb{R}^2$ auffassen, ist klar, was wir mit linearer Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ meinen. Wir zeigen jetzt:

Lemma 2.5.1 (Linear unabhängige Perioden) *Genau dann sind $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, wenn beide nicht $= 0$ sind, und wenn $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ ist.*

Beweis: Falls eine der Zahlen $= 0$ ist, liegt immer lineare Abhängigkeit vor. Im anderen Fall sind sie genau dann linear abhängig, wenn es eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$ gibt, so dass $\omega_1 = \alpha\,\omega_2$ ist, und daraus folgt die Behauptung. □

Zwei linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ definieren ein *ganzzahliges Gitter*

$$\Omega \;:=\; \{\, \omega := n_1\,\omega_1 \;+\; n_2\,\omega_2\,, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \,\}\,. \tag{2.5.1}$$

Da sich das Gitter nicht ändert, wenn wir z. B. ω_1 durch $-\omega_1$ ersetzen, können wir immer annehmen, dass der Quotient ω_1/ω_2 in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ liegt. Die Menge der Paare (ω_1, ω_2) mit $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ ist offen und soll mit $\mathbb{O}$ bezeichnet werden. Um die Konvergenz einiger wichtiger Reihen zeigen zu können, beweisen wir folgendes Hilfsresultat:

Lemma 2.5.2 *Für jedes $\alpha > 2$ und jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{O}$ gibt es ein $M = M(\alpha, K) > 0$ so, dass*

$$\forall\ (\omega_1, \omega_2) \;\in\; K \;:\qquad \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} |\omega|^{-\alpha} \;\leq M\,. \tag{2.5.2}$$

Für $\alpha \leq 2$ dagegen ist die Reihe in (2.5.2) divergent.

Beweis: Die Funktion $q(x, y, \omega_1, \omega_2) := |x\,\omega_1 + y\,\omega_2|/\sqrt{(x^2 + y^2)}$ ist für $(x, y, \omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^2$ stetig und nimmt deshalb auf $S_1 \times K$, mit $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, ein Maximum T und ein Minimum t an. Da q keine Nullstelle haben kann, folgt $t > 0$, und weil $q(r\,x, r\,y, \omega_1, \omega_2) = q(x, y, \omega_1, \omega_2)$ ist für alle $r > 0$, folgt

$$t \;\leq\; q(x, y, \omega_1, \omega_2) \;\leq\; T \qquad \forall\ (x, y, \omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times K\,.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\forall\ \omega = n_1\,\omega_1 \;+\; n_2 \;\in\; \Omega \;:\qquad t\,\sqrt{(n_1^2 + n_2^2)} \;\leq\; |\omega| \;\leq\; T\,\sqrt{(n_1^2 + n_2^2)}\,.$$

Daher lässt sich die Reihe $\sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} |\omega|^{-\alpha}$ nach oben bzw. unten durch $t^{-\alpha}$ bzw. $T^{-\alpha}$ multipliziert mit der Reihe

$$\sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(n_1^2+n_2^2)^{\alpha/2}} \;=\; 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \;+\; 4\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+m^2)^{\alpha/2}}$$

abschätzen. Weil $(n_1-n_2)^2 = n_1^2+n_2^2-2\,n_1\,n_2 \geq 0$ ist, folgt dass

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+m^2)^{\alpha/2}} \;\leq\; \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(2\,n\,m)^{\alpha/2}} \;=\; 2^{-\alpha/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha/2}}\right),$$

und die rechte Seite ist endlich für $\alpha > 2$. Für $\alpha = 2$ dagegen ist

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+m^2} \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^2+m^2} \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2\,n^2} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2\,n^2} = \infty\,.$$

Also gilt die Behauptung des Lemmas. □

Definition 2.5.3 *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$, $n\in\mathbb{N}$, ein Gebiet. Eine Funktion $f:\ G \longrightarrow \mathbb{C}$ von n komplexen Variablen $z_1,\dots,z_n$ heißt* holomorph *in G, falls sie für jedes $j\in\{1,\dots,n\}$, bei festen, aber beliebigen Werten von z_k für alle $k\neq j$, und z_j so dass $(z_1,\dots,z_n)^T\in G$ ist, eine holomorphe Funktion der Variablen z_j ist.*

Beachte, dass sich die Definition der normalen Konvergenz von Folgen und Reihen auf Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinern läßt, und dass Satz 1.3.3 auch für diese Situation gilt. Deshalb können wir jetzt folgendes Ergebnis zeigen:

Satz 2.5.4 *Das Produkt*

$$\sigma(z) \;=\; \sigma(z;\omega_1,\omega_2) \;:=\; z\prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}(1-z/\omega)\,\exp[z/\omega+(1/2)\,(z/\omega)^2]$$

konvergiert auf $\mathbb{C}\times\mathbb{O}$ normal, und daher ist σ dort eine holomorphe Funktion dreier Variabler. Insbesondere ist σ eine ganze Funktion in z, für jedes feste Paar $(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{O}$.

Beweis: Wegen $|1-E_2(z)| \leq |z|^3$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.5.2. □

Definition 2.5.5 *Aus* Lemma 2.5.2 *folgt auch die Divergenz des Produktes*

$$\prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}(1-z/\omega)\,\exp[z/\omega]\,,$$

und daher ist σ in gewissem Sinn die einfachste ganze Funktion, welche die Gitterpunkte ω als Nullstellen hat. Sie heißt die Weierstraßsche σ-Funktion. *Ihre logarithmische Ableitung nach z*

$$\zeta(z) \;=\; \frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)} \;=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-\omega} \;+\; \frac{1}{\omega} \;+\; \frac{z}{\omega^2}\right),$$

hat einfache Polen an den Gitterpunkten. Sie heißt Eisenstein-Weierstraßsche ζ-Funktion. *Nochmaliges Differenzieren führt auf die Funktion*

$$\wp(z) \;=\; -\zeta(z)' \;=\; \frac{1}{z^2} \;+\; \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} \;-\; \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{2.5.3}$$

Sie heißt Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

Satz 2.5.6 *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt*

$$\wp(z + \omega_1) \;=\; \wp(z + \omega_2) \;=\; \wp(z)\,. \tag{2.5.4}$$

Beweis: Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$\wp(z)' \;=\; \frac{-2}{z^3} \;+\; \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{-2}{(z-\omega)^3} \;=\; -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}\,,$$

und aus dieser Darstellung ergibt sich dass $\wp(z+\omega_1)' = \wp(z)'$ ist. Daher ist $\wp(z+\omega_1) - \wp(z)$ konstant, sagen wir: $= c$. Es folgt aber aus (2.5.3), dass $\wp$ eine gerade Funktion ist, dass also speziell $\wp(\omega_1/2) = \wp(-\omega_1/2)$ ist, und daher folgt $c = 0$. Durch Vertauschen von ω_2 und ω_1 folgt dann, dass (2.5.4) gilt. □

Wegen der Eigenschaft (2.5.4) heißt $\wp$ auch *doppeltperiodische Funktion.*

Kapitel 3

Meromorphe Funktionen mit vorgegebenen Hauptteilen

Im Folgenden sei $(z_k)_{k\geq 0}$ eine gegebene Zahlenfolge ohne endlichen Häufungspunkt, wobei noch gelten soll, dass alle ihre Glieder paarweise verschieden sind und dass $z_0 = 0$ ist. Weiter seien rationale Funktionen der Form

$$h_k(z) \;=\; \sum_{j=1}^{n_k} \frac{h_{kj}}{(z-z_k)^j}\,, \qquad h_{kj} \in \mathbb{C}\,,$$

gegeben, wobei noch angenommen sei, dass für $k \geq 1$ die Zahlen $h_{kn_k} \neq 0$ seien. Daher sind die $h_k(z)$ für $k \geq 1$ nicht trivial, während $h_0(z) \equiv 0$ erlaubt sein soll. Gesucht ist dann eine meromorphe Funktion $f(z)$, welche genau an den Zahlen z_k Pole haben soll, und zwar so dass $h_k(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe von f um den Punkt z_k ist – falls $h_0(z) \equiv 0$ sein sollte, dann ist der Nullpunkt eine hebbare Singularität von f.

3.1 Der Satz von Mittag–Leffler

Definition 3.1.1 *Für $k \geq 1$ ist der Hauptteil $h_k(z)$ im Nullpunkt holomorph, und wir bezeichnen mit*

$$p_{kd}(z) \;=\; \sum_{j=0}^{d-1} \frac{h^{(j)}(0)}{j!}\; z^j \qquad (d \in \mathbb{N})$$

das Taylorpolynom von $h_k(z)$ vom Grad $d-1$ und setzen noch $p_{k0}(z) \equiv 0$. Weiter sei $M = \{z_1,\, z_2\, \ldots\}$.

Lemma 3.1.2 *Falls die Zahlen $d_k \in \mathbb{N}_0$ so sind, dass die Reihe $\sum_k (h_k(z) - p_{kd_k}(z))$ in $\mathbb{C} \setminus M$ normal konvergiert, dann ist die Funktion*

$$f(z) \;:=\; h_0(z) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \big(h_k(z) - p_{kd_k}(z)\big) \qquad z \neq z_0,\, z_1\, z_2 \ldots \tag{3.1.1}$$

in $\mathbb{C}$ meromorph, mit Polen lediglich an den Stellen z_k, $k \in \mathbb{N}_0$, und den Hauptteilen $h_k(z)$.

Beweis: Für ein $n \geq 2$ sei $f_n(z) = \sum_{k\geq n}(h_k(z) - p_{kd_k}(z))$. Diese Reihe ist ebenfalls in $\mathbb{C} \setminus M$ normal konvergent, und daher ist f_n dort holomorph. Für $r > 0$ und n so groß, dass $|z_k| > r$ ist falls $k \geq n$, folgt aus dem Maximumprinzip dass die Reihe auf der Kreisscheibe $|z| \leq r$ gleichmäßig konvergiert, und daher ist f_n an den Stellen z_j, die in dieser Kreisscheibe liegen, ebenfalls holommorph. Also ist f selber in $|z| < r$ meromorph und hat dort die "richtigen" Pole und Hauptteile. Da aber r beliebig groß sein kann, folgt die Behauptung. $\square$

Es bleibt jetzt zu klären, ob es immer möglich ist, die Zahlen d_k so zu wählen, dass (3.1.1) normal konvergiert. Dies wird jetzt gezeigt:

Satz 3.1.3 (Mittag-Leffler) *Es ist immer möglich, die Zahlen d_k so zu wählen, dass* (3.1.1) *normal konvergiert, und deshalb gibt es immer eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die genau an den Stellen z_k Pole mit den Hauptteilen $h_k(z)$ hat.*

Beweis: Für jedes $k \geq 1$ ist die Folge $(p_{kd}(z))$ der Taylorpolynome auf $\{|z| < |z_k|\}$ kompakt konvergent gegen $h_k(z)$, und deshalb existiert ein d_k mit

$$\left| h_k(z) \; - \; p_{kd_k}(z) \right| \; \leq \; 2^{-k} \qquad \text{für} \quad |z| \leq |z_k|/2 \, .$$

Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \setminus M$ können wir n so wählen dass $z_k/2 \notin K$ für $k \geq n$ gilt, und dann erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{k \geq n} \sup_{z \in K} \left| h_k(z) - p_{kd_k}(z) \right| \; \leq \; \sum_{k \geq n} 2^{-k} \; < \; \infty \, ,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

3.2 Beispiele

Einige Beispiele von Reihen der Form (3.1.1) sind uns schon begegnet: Die Darstellungen für die ζ-Funktion und die $\wp$-Funktion sowie deren Ableitung sind solche *Mittag-Leffler-Reihen.* Gleiches gilt für die im Beweis von Satz 1.5.1 gefundene Darstellung der Kotangensfunktion, wenn man sie folgendermaßen umformt:

$$\pi \, \cot(\pi z) \; = \; \frac{1}{z} \; + \; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} \; = \; \frac{1}{z} \; + \; \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\frac{1}{z+k} \; - \; \frac{1}{k} \Big) \, .$$

Allgemein ist die logarithmische Ableitung eines Produktes der Form (2.2.2) gleich der Mittag-Leffler-Reihe

$$\frac{f(z)'}{f(z)} \; = \; \frac{v(0)}{z} \; + \; \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z - z_\nu} \; + \; \sum_{\mu=0}^{k_\nu - 1} \frac{z^\mu}{z_\nu^{\mu+1}} \Big) \, .$$

Schließlich folgt durch logarithmisches Differenzieren der Produktdarstellung der Gammafunktion

$$\frac{\Gamma(z)'}{\Gamma(z)} \; + \; \gamma \; = \; - \frac{1}{z} \; - \; \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z+k} \; - \; \frac{1}{k} \Big)$$

also eine weitere Mittag-Leffler-Reihe. Wenn man die Darstellung der Kotangensfunktion ein– bzw. zweimal differenziert, findet man

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2} \; = \; \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^2} \, , \qquad \frac{\pi^3 \, \cot(\pi z)}{(\sin(\pi z))^2} \; = \; \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^3} \, .$$

Durch Einsetzen spezieller Werte für z erhält man Darstellungen der Zahl π, die allerdings nicht besonders schnell konvergieren!

3.3 Herleitung des Produktsatzes

Aus dem Mittag-Lefflerschen Satz kann man den Produktsatz herleiten – wir deuten dies nur kurz an für den Fall, dass alle Nullstellen einfach sind:

Die Funktion

$$a(z) \ := \ \frac{1}{z} \ + \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z - z_\nu} \ + \ \sum_{\mu=0}^{k_\nu - 1} \frac{z^\mu}{z_\nu^{\mu+1}} \Big)$$

hat die Stammfunktion

$$A(z) \ = \ \log z \ + \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\log(1 - z/z_\nu) \ + \ \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{(z/z_\nu)^\mu}{\mu} \Big) \ ,$$

wobei immer der Hauptwert des Logarithmus genommen werden muss, damit die Reihe konvergiert. Aus $f(z)' = a(z)\, f(z)$ folgt dann, bis auf eine multiplikative Konstante, dass

$$f(z) \ = \ z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z/z_\nu) \ \exp\big[\sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{(z/z_\nu)^\mu}{\mu} \big] \ ,$$

wobei auch die Konvergenz des Produktes folgt.

Kapitel 4

Der Riemannsche Abbildungssatz

Gelegentlich ist es wichtig zu wissen, ob es für zwei Gebiete G_j eine in G_1 *biholomorphe*, d. h., eine holomorphe und bijektive Abbildung nach G_2 gibt. Während dies für allgemeine Gebiete unklar ist, werden wir zeigen, dass es bei einfach zusammenhängenden Gebieten immer ein solches f gibt, außer wenn genau eines der Gebiete die ganze Ebene ist. Dies ist eine Konsequenz aus dem Riemannschen Abbildungssatz, welcher aussagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet G, welches nicht die ganze Ebene ist, biholpmorph (d. h., durch eine auf g holomorphe und injektive Funktion) auf den Einheitskreis $\mathbb{E}$ abgebildet werden kann. Dass dieser Ausnahmefall auftritt, liegt am Liouvilleschen Satz, denn eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{E}$ ist ganz und beschränkt, also konstant, und kann deshalb nicht bijektiv sein.

4.1 Normale Familien und der Montelsche Satz

Definition 4.1.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Familie $\mathcal{F}$ von in G holomorphen Funktionen heißt dort* lokal beschränkt*, falls*

$$\forall\ z_0 \in G \quad \exists\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\ f \in \mathcal{F} \quad \forall\ z \in U_\varepsilon(z_0) \cap G: \quad |f(z)| \ \leq\ M\,.$$

Weiter nennen wir $\mathcal{F}$ in G lokal gleichgradig stetig*, wenn*

$$\forall\ z_0 \in G \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ f \in \mathcal{F} \quad \forall\ z \in U_\delta(z_0) \cap G: \quad |f(z) - f(z_0)| \ \leq\ \varepsilon\,.$$

Im Unterschied zur Definition der gleichmäßigen Stetigkeit darf also hier das δ von z_0, nicht aber von f abhängen.

Lemma 4.1.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $\mathcal{F}$ eine lokal beschränkte Familie von in G holomorphen Funktionen. Dann ist $\mathcal{F}$ auch lokal gleichgradig stetig.*

Beweis: Seien $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_{2r}(z_0)} \subset G$ ist. Wenn wir r eventuell noch verkleinern, damit wir in der Definition der lokalen Beschränktheit $\varepsilon = r$ setzen können, dann folgt für alle z mit $|z - z_0| \leq r$:

$$|f(z)\ -\ f(z_0)| \ =\ \Big|\, \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=2r} \frac{f(w)}{(w-z)\,(w-z_0)}\, dw \Big| \ \leq\ |z - z_0|\, \frac{M}{r}\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 4.1.3 (Montel) *Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen enthält eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von G, und sei die Folge (f_n) in G holomorph und lokal beschränkt. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass die Folge auf A punktweise konvergiert – falls dies nicht so ist, kann man mit dem Cantorschen Diagonalfolgenprinzip eine entsprechende Teilfolge wählen. Sei weiter (z_n) eine Folge in G, welche gegen ein $z^* \in G$ konvergiert. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann wegen Lemma 4.1.2 ein $\delta > 0$ derart, dass aus $z, w \in U_\delta(z^*)$ folgt $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq 1$. Sei $a \in U_\delta(z^*)$, und sei n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $z_n \in U_\delta(z^*)$. Außerdem gelte für $n, m \geq n_0$ dass $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$ ist; dies kann erreicht werden, wenn wir n_0 eventuell noch vergrößern. Dann erhalten wir

$$|f_m(z_m) - f_n(z_n)| \leq |f_m(z_m) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(z_n)| \leq 3\,\varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq n_0\,.$$

Also ist die Folge $(f_n(z_n))$ konvergent, und durch "Mischen" von verschiedenen Folgen mit gleichem Grenzwert z^* zeigt man, dass der Grenzwert $f(z^*) := \lim f_n(z_n)$ nicht von der Wahl der Folge (z_n) abhängen kann. Weil wir auch die konstante Folge $(z_n \equiv z^*)$ benutzen können, schließen wir dass $\lim f_n(z^*) = f(z^*)$ gilt, d. h. dass die Folge (f_n) auf G punktweise konvergiert. Wir zeigen jetzt die (Folgen-)Stetigkeit von f: Sei wieder $\lim z_n = z^*$. Für $\varepsilon > 0$ und $k \geq 1$ folgt mit der punktweisen Konvergenz von (f_n) die Existenz von n_k mit $|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \varepsilon/2$, und o. B. d. A. seien die n_k streng monoton wachsend gewählt. Weil $\lim f_{n_k}(z_k) = f(z^*)$ ist, folgt dass $|f_{n_k}(z_k) - f(z^*)| \leq \varepsilon/2$ ist, sofern nur k hinreichend groß ist. Also gilt

$$|f(z_k) \;-\; f(z^*)| \;\leq\; |f(z_k) \;-\; f_{n_k}(z_k)| \;+\; |f_{n_k}(z_k) - f(z^*)| < \varepsilon$$

falls k groß genug ist, und das ist die Folgenstetigkeit im Punkt z^*. Wenn wir annehmen, dass die Folge (f_n) nicht kompakt gegen f konvergiert, dann gibt es ein Kompaktum $K \subset G$ und ein $\varepsilon > 0$ derart, dass eine Teilfolge (f_{n_k}) sowie eine Punktfolge (z_k) in K existieren, für welche $|f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \varepsilon$ ist, für alle $k \geq 1$. Da K kompakt und damit auch folgenkompakt ist, können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass die Folge (z_k) gegen ein $z^* \in K$ konvergiert, und daraus folgt ein Widerspruch, denn da f stetig ist, konvergiert $f(z_k)$ gegen $f(z^*)$, und auch $f_{n_k}(z_k)$ hat diesen Grenzwert. □

Den Satz von Montel findet man oft auch in einer anderen Formulierung, welche den folgenden Begriff verwendet:

Definition 4.1.4 (Normale Familien) *Eine Familie $\mathcal{F}$ von in einem Gebiet G holomorphen Funktionen heißt* in G normal, *falls jede Folge aus $\mathcal{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge enthält.*

Mit Hilfe dieses Begriffes kann man den Satz von Montel auch so aussprechen:

Satz 4.1.5 *Jede in einem Gebiet G lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist dort normal.*

4.2 Einheiten und Quadratwurzeln

Definition 4.2.1 *Die Menge $\mathcal{H}(G)$ aller in einem Gebiet G holomorphen Funktionen ist, genau wie die Menge der ganzen Funktionen, ein Integritätsbereich. Wir nennen deshalb, wie in der Algebra üblich, ein $f \in \mathcal{H}(G)$ eine* Einheit, *falls es ein $g \in \mathcal{H}(G)$ gibt, für welches $f(z)\,g(z) = 1$ ist für alle $z \in G$, und dies gilt genau dann, wenn f keine Nullstelle in G hat. Wir sagen weiter, dass ein $f \in \mathcal{H}(G)$* die Quadratwurzeleigenschaft besitzt, *wenn ein $g \in \mathcal{H}(G)$ existiert, für welches $f = g^2$ ist.*

Lemma 4.2.2 *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann hat jede Einheit die Quadratwurzeleigenschaft.*

Beweis: Sei f eine Einheit in $\mathcal{H}(G)$. Da G einfach zusammenhängend ist, ist das Kurvenintegral der logarithmischen Ableitung von f wegunabhängig, und daher ist für festes $z_0 \in G$ durch

$$h(z) \;:=\; \int_{z_0}^{z} \frac{f(w)'}{f(w)}\, dw \qquad \forall\, z \in G$$

eine in G holomorphe Funktion definiert, und wegen der Tatsache, dass die Ableitung von $f(z)\, \mathrm{e}^{-h(z)}$ die Nullfunktion ist, folgt $f(z) = f(z_0)\, \mathrm{e}^{h(z)}$. Die Funktion $g(z) := f(z_0)^{1/2}\, \mathrm{e}^{h(z)/2}$ ist dann ebenfalls in G holomorph, und es folgt $g^2 = f$. □

Definition 4.2.3 (Q–Gebiet) *Wir wollen im Folgenden ein Gebiet G als* Q–Gebiet *bezeichnen, wenn $0 \in G$ ist, und wenn jede Einheit die Quadratwurzeleigenschaft hat. Jedes einfach zusammenhängende Gebiet, welches den Nullpunkt enthält, ist also ein Q–Gebiet. Dass umgekehrt jedes Q–Gebiet auch einfach zusammenhängend ist, wird sich später ergeben.*

4.3 Holomorphe Injektionen

Bevor wir den Riemannschen Abbildungssatz beweisen können, zeigen wir zuerst folgendes wesentlich schwächere Resultat:

Lemma 4.3.1 *Zu jedem Q–Gebiet G, welches nicht die gesamte Ebene ist, gibt es eine injektive holomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.*

Beweis: Für ein $a \notin G$ ist $h(z) := z - a$ eine Einheit in $\mathcal{H}(G)$, und hat deshalb die Quadratwurzeleigenschaft. Somit gibt es ein $v \in \mathcal{H}(G)$ mit $v^2(z) = z - a$ für $z \in G$, und dieses v ist offenbar injektiv, da ja h injektiv ist. Weiter ist $v(G) \cap (-v(G)) = \emptyset$, denn aus $z_1,\, z_2 \in G$ und $v(z_1) = -v(z_2)$ folgt $z_1 - a = z_2 - a$, also $z_1 = z_2$ und daher $v(z_1) = v(z_2) = 0$, was nicht sein kann. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $-v(G)$ offen und nicht leer, enthält also eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K(z_0, r)}$ mit $r > 0$. Also folgt $v(G) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r)}$. Die Funktion

$$g(z) \;:=\; \frac{r}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} \;-\; \frac{1}{v(0) - z_0} \right)$$

ist dann auf $\mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r)}$ holomorph und injektiv, und erfüllt dort die Abschätzung

$$|g(z)| \;\le\; \frac{r}{2} \left(\frac{1}{|z - z_0|} \;+\; \frac{1}{|v(0) - z_0|} \right) \;<\; 1\,.$$

Daher ist $f := g \circ v$ injektiv und holomorph in G, und $|f(v(z))| < 1$ für alle $z \in G$. Weiter ist $f(0) = 0$, was noch zu zeigen war. □

4.4 Dehnungen

Definition 4.4.1 *Sei G ein Gebiet mit $0 \in G \subset \mathbb{E}$. Eine holomorphe Abbildung $\kappa : G \longrightarrow \mathbb{E}$ mit*

$$\kappa(0) \;=\; 0\,; \qquad |\kappa(z)| \;>\; |z| \qquad \forall\, z \in G \setminus \{0\}$$

heißt (echte) Dehnung *in G.*

Lemma 4.4.2

(a) *Für jedes* $c \in \mathbb{E}$ *wird durch* $g_c(z) = (z-c)\,(\bar{c}\,z - 1)^{-1}$ *eine bijektive Abbildung von* $\mathbb{E}$ *auf sich definiert, welche zu sich selber invers ist.*

(b) *Für jedes* $c \in \mathbb{E}$ *ist die Abbildung*

$$\psi_c(z) \;=\; g_{c^2}\big(g_c(z)^2\big)$$

holomorph in $\mathbb{E}$ *und erfüllt*

$$\psi_c(0) \;=\; 0\,, \qquad |\psi_c(z)| \;<\; |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{E}\setminus\{0\}\,.$$

(c) *Sei* $G \subset \mathbb{E}$ *ein Q-Gebiet, und sei* $c \in \mathbb{E}$ *so, dass* $c^2 \notin G$ *ist. Sei weiter* $v \in \mathcal{H}(G)$ *diejenige Quadratwurzel der Restriktion von* g_{c^2} *auf* G*, welche* $v(0) = c$ *erfüllt. Dann ist durch* $\kappa(z) := g_c(v(z))$ *eine Dehnung in* G *gegeben, und es gilt* $\psi_c(\kappa(z)) = z$ *für alle* $z \in G$*.*

Beweis: Die Behauptung (a) folgt durch Nachrechnen oder aus Ergebnissen für sogenannte *Möbiustransformationen*, auch *gebrochen-lineare Abbildungen* genannt. Wegen (a) ist klar, dass $|\psi_c(z)| \le 1$ ist für alle $z \in \mathbb{E}$, sowie $\psi_c(0) = 0$, und deshalb folgt aus dem *Schwarzschen Lemma* dass (b) gilt, da ψ_c keine Drehung ist. Um (c) zu zeigen, beachten wir, dass g_{c^2} eine Einheit in $\mathcal{H}(G)$ ist, und dass $g_{c^2}(0) = c^2$ ist. Daher gibt es eine Quadratwurzel v mit der gewünschten Eigenschaft, und damit ist κ in G holomorph mit Werten in $\mathbb{E}$. Außerdem ist $\kappa(0) = 0$. Nach Definition von v folgt dann $\psi_c(\kappa(z)) = z$ auf G, und somit ist κ injektiv. Mit (b) folgt dann $|z| = |\psi_c(\kappa(z))| < |\kappa(z)|$ für $z \in G \setminus \{0\}$. □

4.5 Der Injektionssatz von Hurwitz

Lemma 4.5.1 *Sei* G *ein Gebiet, und sei* (f_n) *eine Folge aus* $\mathcal{H}(G)$*, welche in* G *kompakt gegen eine nicht konstante Grenzfunktion* f *konvergiert. Dann gibt es zu jedem* $z_0 \in G$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sowie eine Folge* (z_n) *in* G*, so dass*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n \;=\; z_0\,, \qquad f_n(z_n) \;=\; f(z_0) \quad \forall\, n \ge n_0\,.$$

Beweis: Sei $z_0 \in G$ gegeben, und o. B. d. A. sei $f(z_0) = 0$ angenommen; dann ist f nach Voraussetzung nicht die Nullfunktion. Also existiert ein $r > 0$ derart, dass $K := \{|z - z_0| \le r\} \subset G$, und $f(z) \neq 0$ für $z \in K \setminus \{z_0\}$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge auf K gibt es ein n_0 so, dass $|f_n(z_0) < \min\{|f_n(z)| \,:\, |z - z_0| = r\}$, denn andernfalls müsste eine Teilfolge (f_{n_k}) existieren, für welche es Randpunkte z_k gäbe mit $\lim f_{n_k}(z_k) = 0$, und mit dem üblichen Kompaktheitsargument würde die Existenz einer Nullstelle von f auf dem Rand von K folgen, was nicht sein kann. Also liegt für $n \ge n_0$ das Minimum von $|f_n|$ im Inneren von K, woraus mit dem Minimumprinzip die Existenz einer Nullstelle z_n von f_n im Inneren folgt. Es muss dann $\lim z_n = z_0$ sein, denn andernfalls gäbe es eine Teilfolge, welche gegen eine andere Nullstelle von f konvergieren würde, was nicht sein kann. □

Satz 4.5.2 (Injektionssatz) *Seien* G_1, G_2 *Gebiete, und sei* (f_n) *eine Folge von in* G_1 *holomorphen Funktionen mit Werten in* G_2*, welche in* G_1 *kompakt gegen ein* f *konvergiert. Falls* f *nicht konstant und alle* f_n *injektiv sind, dann ist auch* f *injektiv und hat ebenfalls Werte in* G_2*.*

Beweis: Für ein $z_0 \in G_1$ folgt mit Lemma 4.5.1 dass alle bis auf endlich viele der f_n den Wert $f(z_0)$ annehmen, und deshalb muss $f(z_0) \in G_2$ sein. Also liegen alle Werte von f in G_2. Da alle f_n injektiv sein sollen, folgt dass die Funktionen $f_n(z) - f_n(z_0)$ in $G_1 \setminus \{z_0\}$ nullstellenfrei sind, und wie oben gilt dasselbe dann für die Grenzfunktion, woraus die Injektivität von f folgt. □

4.6 Der Abbildungssatz

Satz 4.6.1 (Riemannscher Abbildungssatz) *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ lässt sich biholomorph auf den Einheitskreis $\mathbb{E}$ abbilden.*

Beweis: O. B. d. A. sei $0 \in G$, d. h., G ein Q-Gebiet. Sei $p \in G \setminus \{0\}$, und sei $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(G) : f \text{ injektiv}, \; f(0) = 0, \; f : G \longrightarrow \mathbb{E}\}$: Wegen Lemma 4.3.1 ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$, und daher ist

$$\mu \;:=\; \sup \{ \, |f(p)| \; : \; f \in \mathcal{F} \, \} \;>\; 0 \, .$$

Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{F}$ mit $\lim |f_n(p)| = \mu$. Nach dem Satz von Montel gibt es eine Teilfolge (h_n), welche in G kompakt gegen ein $h \in \mathcal{H}(G)$ konvergiert, und dann folgt $h(0) = 0$, $|h(p)| = \mu$, so dass h insbesondere nicht konstant ist. Nach dem Injektionssatz ist h bijektiv mit Werten in $\mathbb{E}$, d. h., $h \in \mathcal{F}$. Man zeigt leicht, dass $h(G)$ wieder ein Q-Gebiet ist, und wenn es nicht gleich $\mathbb{E}$ wäre, dann gäbe es nach Lemma 4.4.2 (c) eine Dehnung $\kappa : h(G) \longrightarrow \mathbb{E}$, und $g := \kappa \circ h$ wäre in $\mathcal{F}$, woraus wegen $|g(p)| = |\kappa(h(p))| > |h(p)|$ ein Widerspruch folgen würde. Also ist $h(G) = \mathbb{E}$, und damit ist h die gesuchte Funktion. □

Kapitel 5

Asymptotische Entwicklungen

Die Theorie der asymptotischen Entwicklungen behandelt Funktionen f, die an einer festen Stelle z_0, die wir o. B. d. A. als den Nullpunkt $z_0 = 0$ annehmen können, eine Singularität haben, welche auch eine sogenannte *Verzweigungsstelle* sein kann. Dies bedeutet, dass f zwar entlang jedes genügend kleinen Kreises um $z_0 = 0$ analytisch fortgesetzt werden kann, dass aber der Wert von f nach (einmaliger) Fortsetzung entlang eines solchen Kreises (bei Rückkehr zum Ausgangspunkt) nicht der gleiche wie am Anfang ist. Als Beispiel für solche Funktionen nennen wir $z^{1/2}$ und $\log z$. Anders als bei diesen beiden Beispielen soll f jetzt aber, in einem noch zu definierenden Sinn, im Punkt $z_0 = 0$ beliebig oft *sektoriell differenzierbar sein*, und die asymptotische Entwicklung von f ist dann nichts anderes als die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Zur Definition der sektoriellen Ableitungen benötigen wir insbesondere den Begriff eines *Sektors*, und das ist eine Menge der Form

$$S \;:=\; \{\, z \;:\; 0 \;<\; |z| \;<\; r\,, \quad \alpha \;< \arg z \;<\; \beta \,\}\,.$$

Es liegt dann nahe, die Punkte $z \in S$ in der Form $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ mit $0 < \rho < r$ und $\alpha < \phi < \beta$ zu schreiben. Falls $\beta - \alpha \le 2\,\pi$ ist, kann man diesen Sektor S problemlos als (offene) Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ auffassen, aber um verzweigte Funktionen betrachten zu können, wollen wir auch Sektoren S mit *Öffnungswinkel* $\beta - \alpha > 2\,\pi$ zulassen. Diese Sektoren muss man dann aber so verstehen, dass Punkte $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ und $\tilde z = \rho\, \mathrm{e}^{i(\phi+2\pi)}$ in S als verschieden anzusehen sind, da eine verzweigte Funktion f an diesen Stellen auch unterschiedliche Werte haben kann. Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden die sogenannte *Riemannsche Fläche des Logarithmus*. Dies bedeutet anschaulich, dass wir anstelle der komplexen Ebene eine unendlich lange Wendeltreppe betrachten, deren Achse der Nullpunkt ist, und auf der die Punkte $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ und $\tilde z = \rho\, \mathrm{e}^{i(\phi+2\pi)}$ in aufeinanderfolgenden Stockwerken liegen. Im nächsten Abschnitt geben wir eine formale Definition dieser sehr einfachen Riemannschen Fläche. Für eine allgemeine Theorie Riemannscher Flächen wird auf die Literatur, z. B. auf [4], verwiesen.

5.1 Sektorielle Gebiete

Definition 5.1.1 *In diesem Kapitel bezeichnen wir mit $\mathbb{L}$ die Menge aller reellen Zahlenpaare (r, ϕ), wobei $r > 0$ sein soll, zusammen mit der Abbildung*

$$(r, \phi) \;\longmapsto\; z \;=\; \pi(r, \phi) \;:=\; r\, \mathrm{e}^{i\phi} \tag{5.1.1}$$

von $\mathbb{L}$ nach $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lokal ist die Abbildung π umkehrbar, da offenbar $r = |z|$ und $\phi = \arg z$ ist; allerdings entsprechen die Paare (r, ϕ) und $(r, \phi + 2\,\pi)$ dem gleichen Punkt in $\mathbb{C}^*$. Die Menge $\mathbb{L}$ mit dieser Abbildung nennen wir die Riemannsche Fläche des Logarithmus*, da auf ihr durch*

$$\log z = \log |z| + i\, \arg z\,, \qquad |z| \;=\; r\,, \quad \arg z = \phi$$

der komplexe Logarithmus zu einer eindeutig definierten Funktion wird, während dies in der Menge $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *bekanntlich nicht der Fall ist.*

Da die Menge $\mathbb{L}$ topologisch nichts anderes als die obere Halbebene in $\mathbb{R}^2$ ist, ist klar, was ein Gebiet $G \subset \mathbb{L}$ ist, und da die Abbildung π stetig und lokal umkehrbar ist, entspricht einem solchen Gebiet ein Bildgebiet $\pi(G)$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Umgekehrt kann ein Gebiet in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ aber nicht immer mit einem Gebiet in $\mathbb{L}$ identifiziert werden, was aber nichts ausmachen wird.

Definition 5.1.2 *Für* $d \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ *und* $0 < r \le \infty$ *heißt*

$$S \;=\; S(d,\alpha,r) \;:=\; \big\{ (\rho,\phi)\;:\; 0<\rho<r\,,\; |d-\phi| < \alpha/2 \big\} \;\subset\; \mathbb{L} \tag{5.1.2}$$

Sektor. *Dabei soll* $\alpha > 2\pi$ *zugelassen sein, so dass man sich* S *in diesem Fall nicht als Teilmenge von* $\mathbb{C}$, *sondern auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus vorstellen muss. Wir nennen* d *die* Mittelrichtung, α *den* Öffnungswinkel *und* r *den* Radius *von* S. *Beachte, dass* $r=\infty$ *zugelassen ist, und wir schreiben auch kürzer* $S(d,\alpha)$ *anstelle von* $S(d,\alpha,\infty)$. *Für* $r \ne \infty$ *nennen wir*

$$\overline{S} \;=\; \overline{S(d,\alpha,r)} \;:=\; \big\{ (\rho,\phi)\;:\; 0<\rho\le r\,,\; |d-\phi| \le \alpha/2 \big\} \;\subset\; \mathbb{L} \tag{5.1.3}$$

auch einen abgeschlossenen Sektor *– beachte aber, dass der Nullpunkt nicht zu* $\overline{S}$ *gehört.Ein Gebiet* $G\subset\mathbb{L}$ *heißt* sektoriell, *falls es* $d\in\mathbb{R}$ *und* $\alpha\in\mathbb{R}_+$ *gibt, für die folgendes gilt:*

(a) $G \subset S(d,\alpha)$.

(b) $\forall\, \beta \in (0,\alpha)\ \exists\, r>0$ *mit* $\overline{S(d,\beta,r)} \subset G$.

Einerseits ist es im Folgenden wichtig zu beachten, dass ein Zahlenpaar $(r,\phi)\in\mathbb{L}$ zwar eine komplexe Zahl z festlegt, dass aber umgekehrt dieselbe Zahl z zu unterschiedlichen Paaren $(r,\phi)\in\mathbb{L}$ gehört. Andererseits wird es bequem sein, statt $(r,\phi)\in\mathbb{L}$ einfacher und kürzer $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ zu schreiben, wobei aber immer zu beachten ist, dass dann $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ und $z\,\mathrm{e}^{2\pi i} = r\,\mathrm{e}^{i(\phi+2\pi)}$ zwar dieselben komplexen Zahlen, aber unterschiedliche Punkte in $\mathbb{L}$ sind! Wir wollen dann eine Aussage der Form $z \longrightarrow z_0$ so verstehen, dass $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ und $z_0 = r_0\,\mathrm{e}^{i\phi_0}$ sein sollen, wobei $r \longrightarrow r_0$ und $\phi\longrightarrow\phi_0$ gehen soll. Mit dieser Festlegung ist dann klar, was es bedeutet dass eine in einem Gebiet $G\subset\mathbb{L}$ definierte Funktion f *holomorph* oder *analytisch* ist. Außerdem können wir Kurven bzw. Kurvenintegrale in $\mathbb{L}$ definieren, wobei die Parameterdarstellung der Kurve durch zwei Parameterdarstellungen $r(t)$ und $\phi(t)$ gegeben ist. Diese zusammen legen dann ein $z(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\phi(t)}$ fest, und falls die Kurve differenzierbar ist, ist nach der Kettenregel

$$z'(t) \;=\; \big(r'(t) + r(t)\,\phi'(t)\big)\,\mathrm{e}^{\phi(t)}\,.$$

Aufgabe 5.1.3 *Zeige dass die in der Definition eines sektoriellen Gebietes vorkommenden Parameter* d *und* α *durch* G *eindeutig bestimmt sind. Wie bei Sektoren nennen wir* d *Mittelrichtung und* α *Öffnungswinkel von* G.

5.2 Sektorielle Stetigkeit und Ableitungen

Im Folgenden sei G immer ein sektorielles Gebiet mit Mittelrichtung d und Öffnungswinkel α.

Definition 5.2.1 *Die Menge aller in* G *holomorphen Funktionen wird wieder mit* $\mathcal{H}(G)$ *bezeichnet. Ein* $f\in\mathcal{H}(G)$ *heißt*

(a) *im Nullpunkt* beschränkt, *falls zu jedem abgeschlossenen Teilsektor* $\overline{S}\subset G$ *ein* C *existiert, so dass*

$$|f(z)| \;\le\; C \qquad \forall\, z\in\overline{S}\,.$$

(b) *im Nullpunkt* stetig*, falls ein* $f_0 \in \mathbb{C}$ *existiert, so dass*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \beta \in (0,\alpha) \quad \exists\, r > 0 \quad \forall\, z \in \overline{S(d,\beta,r)} \;: \qquad |f(z) - f_0| \;\le\; \varepsilon\,. \tag{5.2.1}$$

Wenn dies so ist, schreiben wir auch $f(0) := f_0 = \lim_{G \ni z \to 0} f(z)$*.*

(c) *im Nullpunkt* beliebig oft differenzierbar*, falls alle Ableitungen von* f *im Nullpunkt stetig sind.*

Lemma 5.2.2 *Für alle* $f \in \mathcal{H}(G)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f *ist im Nullpunkt beliebig oft differenzierbar.*

(b) *Für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *gibt es* $f_k \in \mathbb{C}$ *derart, dass für alle* $N \in \mathbb{N}_0$ *die Funktionen*

$$r_N(z;f) \;:=\; z^{-N} \,\Big(\, f(z) \;-\; \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, z^k\Big) \tag{5.2.2}$$

im Nullpunkt beschränkt sind.

Falls eine der Aussagen richtig ist, dann sind alle $r_N(z;f)$ *sogar im Nullpunkt stetig, und es gilt*

$$f_k \;=\; \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \;=\; \lim_{G \ni z \to 0} r_k(z;f) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{5.2.3}$$

Insbesondere sind also alle Zahlen f_k *durch* f *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei (a) richtig. Durch partielle Integration zeigt man mit Induktion über N die Identität

$$f(z) \;=\; \int_0^z \frac{(z-w)^{N-1}}{(N-1)!}\; f^{(N)}(w)\; dw \;+\; \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\; z^k \qquad \forall\, N \ge 1\,,\; z \in G\,.$$

Wir wählen jetzt β und r so, dass $\overline{S(d,\beta,r)} \subset G$ ist, so dass wir für $z \in \overline{S(d,\beta,r)}$ geradlinig integrieren können. Wenn man jetzt $f_k = f^{(k)}(0)/k!$ setzt und in dem obigen Integral $w = x\,z$, $0 \le x \le 1$ substituiert, so erhält man für solche z und alle $N \ge 1$ die Darstellung

$$r_N(z;f) \;-\; f_N \;=\; \int_0^1 \frac{(1-x)^{N-1}}{(N-1)!}\; \big(f^{(N)}(xz) - f^{(N)}(0)\big)\; dx\,. \tag{5.2.4}$$

Hieraus folgt dass der Rest $r_N(z;f)$ in G gegen f_N konvergiert wenn $z \to 0$ geht, und daraus wiederum ergibt sich (b) – beachte, dass für $N = 0$ nichts zu zeigen ist! Wenn umgekehrt (b) erfüllt ist, dann ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen für $N \ge 0$ und $z \in G$

$$f^{(N)}(z) \;-\; N!\, f_N \;=\; \frac{d^N}{dz^N}\; z^{N+1}\, r_N(z;f) \;=\; \frac{N!}{2\,\pi\, i}\; \oint_\gamma \frac{w^{N+1}\, r_k(w;f)}{(w-z)^{N+1}}\; dw\,, \tag{5.2.5}$$

wobei entlang eines kleinen Kreises um z mit Radius $\delta_z > 0$ integriert wird. Für β, r und $\tilde\beta$, $\tilde r$ so, dass $\overline{S(d,\beta,r)} \subset \overline{S(d,\tilde\beta,\tilde r)} \subset G$ ist, sieht man, dass man $\delta_z = |z|\,\delta$ wählen kann, wobei $z \in \overline{S(d,\beta,r)}$ und $\delta > 0$ unabhängig von z und so klein ist, dass der Träger von γ in $\overline{S(d,\tilde\beta,\tilde r)}$ ist. Durch Abschätzen dieses Integrals folgt dann, dass $f^{(N)}(z) \;-\; N!\, f_N \to 0$ geht für $z \to 0$ in $\overline{S(d,\beta,r)}$, woraus (a) folgt. □

5.3 Asymptotische Entwicklungen

Definition 5.3.1 *Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, und sei $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Wir nennen $\hat{f}(z)$* asymptotische Entwicklung *für $f(z)$, für $z \to 0$ in G, falls die in* (5.2.2) *definierten Reste $r_N(z; f)$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$ im Nullpunkt beschränkt sind. Wir schreiben dann auch*

$$f(z) \ \cong \hat{f}(z) \quad \text{in} \quad G\,.$$

Beispiel 5.3.2 *Für $k > 0$ sei $f(z) = \exp(-z^{-k})$, $2k\,|\arg z| < \pi$. Dann ist $f(z) \cong \hat{0}$, wobei $\hat{0}$ die Potenzreihe bezeichnet, deren Koeffizienten alle verschwinden.*

Bemerkung 5.3.3 *Nach* Lemma 5.2.2 *ist $\hat{f}(z)$ genau dann asymptotische Entwicklung für $f(z)$, wenn alle Ableitungen von f im Nullpunkt stetig sind, und wenn* (5.2.3) *gilt. Daher hat $f(z)$ höchstens eine asymptotische Entwicklung, und diese ist gleich der Taylorreihe von $f(z)$. Das angegebene Beispiel zeigt aber, dass zu einer Reihe $\hat{f}(z)$ immer unendlich viele Funktionen existieren, die diese Asymptotik haben; dass es auch immer ein $f(z)$ gibt, folgt aus dem Satz von Ritt, der im übernächsten Abschnitt bewiesen wird.*

5.4 Rechenregeln für Asymptotiken

Definition 5.4.1 *Wir schreiben $\mathcal{A}(G)$ für die Menge aller $f \in \mathcal{H}(G)$, welche eine asymptotische Entwicklung haben.*

Satz 5.4.2 (Rechenregeln) *Für $f, g \in \mathcal{A}(G)$ sind auch $f+g, fg, f' \in \mathcal{A}(G)$. Genauer gilt: Aus $f(z) \cong \hat{f}(z)$ in G und $g(z) \cong \hat{g}(z)$ in G folgt $f(z)+g(z) \cong \hat{f}(z)+\hat{g}(z)$ in G, $f(z)g(z) \cong \hat{f}(z)\hat{g}(z)$ in G, sowie $f'(z) \cong \hat{f}'(z)$ in G.*

Beweis: Die Leibnizregel für höhere Ableitungen eines Produktes besagt, dass

$$\frac{d^k}{dt^k}\, f(z)\, g(z) \ = \ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, f^{(k-j)}(z)\, g^{(j)}(z)\,,$$

also insbesondere

$$\frac{1}{k!}\, \frac{d^k}{dt^k}\, f(z)\, g(z)_{|z=0} \ = \ \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(k-j)}(0)}{(k-j)!}\, \frac{g^{(j)}(0)}{j!}\,.$$

Hieraus folgt die Regel für das Produkt fg. Die übrigen Regeln sind offensichtlich. □

Definition 5.4.3 *Sei der Öffnungswinkel von G größer als 2π, so dass also Punkte in G existieren, deren Argumente sich um 2π unterscheiden. Dann nennen wir ein $f \in \mathcal{H}(G)$* unverzweigt, *falls*

$$\forall\, z \quad \text{mit} \quad z,\, z\,\mathrm{e}^{2\pi i} \ \in \ G: \qquad f(z) \ = \ f(z\mathrm{e}^{2\pi i})\,.$$

Wenn eine Funktion f in einer punktierten Kreisscheibe $K'(0,r)$ in der Ebene holomorph ist, dann ist sie auch in jedem Gebiet auf der Riemannschen Fläche, in welchem nur Punkte z mit $|z| < r$ liegen, holomorph und unverzweigt, und wir sagen dass sich solche f auf die Riemannsche Fläche liften lassen.

Satz 5.4.4 *Ist $f \in \mathcal{H}(K'(0,r)$ für ein $r > 0$, und ist f im Nullpunkt beschränkt, also auch im Nullpunkt holomorph, so ist die Potenzreihenentwicklung von f um 0 auch asymptotische Entwicklung der Liftung von f in jedem Gebiet, in welchem nur Punkte z mit $|z| < r$ liegen. Ist umgekehrt der Öffnungswinkel von g größer als 2π, und ist $f \in \mathcal{A}(G)$ unverzweigt, so ist f im Nullpunkt der komplexen Ebene holomorph.*

Beweis: Aus $f(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$, für $|z| < r$, folgt $r_N(z; f) = \sum_N^\infty f_k\, z^k$, und deshalb sind alle Reste im Nullpunkt beschränkt, also ist die Liftung zur Potenzreihe von f asymptotisch. Die Umkehrung ist klar, da alle $f \in \mathcal{A}(G)$ im Nullpunkt beschränkt sind. □

5.5 Der Satz von Ritt

Bei einer konvergenten Potenzreihe können die Koeffizienten nicht beliebig schnell wachsen; dies ist bei asymptotischen Reihen völlig anders:

Satz 5.5.1 (Ritt) *Zu jedem sektoriellen Gebiet G und jeder Potenzreihe $\hat{f}(z)$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) \cong \hat{f}(z)$ in G.*

Beweis: O. B. d. A. sei $G = S(d, \alpha)$. Mit $\beta = \pi/\alpha$ und $c_k = (|f_k|\, k!)^{-1}$ falls $f_k \neq 0$, bzw. $c_n = 0$ im anderen Fall, setzen wir

$$w_k(z) \;=\; 1 \;-\; \exp\big[-c_k\, z^{-\beta}\, \mathrm{e}^{-id\beta}\big] \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Da in der linken Halbebene $|1 - \mathrm{e}^z| < |z|$ ist, und da $|\arg(z\mathrm{e}^{-id})^\beta| < \pi/2$ ist, folgt die Abschätzung

$$|f_k|\, |z^k|\, |w_k(z)| \;\le\; \frac{|z|^{k-\beta}}{k!} \qquad \forall\, z \in G\,,\; k \ge 0\,.$$

Also konvergiert die Reihe

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, z^k\, w_k(z)$$

in G kompakt, und somit ist $f \in \mathcal{H}(G)$. Weiter gilt für die Reste

$$r_N(z; f) \;=\; \sum_{k=N}^{\infty} f_k\, z^k\, w_k(z) \;-\; \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, z^{k-N}\, \exp(-c_k (z\mathrm{e}^{-id})^{-\beta})\,.$$

Während die erste Reihe auf jedem Kompaktum in G beschränkt ist, jedenfalls wenn $N \ge \beta$ ist, konvergieren die Glieder der zweiten Summe alle gegen 0 für $z \to 0$ in G. Daraus folgt die Behauptung. □

Einerseits existiert nach dem Satz von Ritt zu jeder Potenzreihe eine Funktion, die diese Reihe auf einem gegebenen Gebiet als asymptotische Entwicklung hat, andererseits ist diese Funktion nicht eindeutig bestimmt. Dieser Umstand hat zur Definition von sogenannten *Gevrey-Asymptotiken* geführt, die jetzt besprochen werden sollen.

5.6 Gevrey-Asymptotiken

In der Definition einer asymptotischen Entwicklung wird nur verlangt, dass alle Reste $r_N(z; f)$ im Nullpunkt beschränkt sind, aber es wird nichts ausgesagt, wie diese Schranke von N abhängt. Dies ist anders in der folgenden Definition:

Definition 5.6.1 *Für $f \in \mathcal{H}(G)$, eine Potenzreihe $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ und eine Zahl $s \geq 0$ heißt $\hat{f}(z)$* asymptotische Entwicklung von f der Ordnung s, *falls zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ zwei Konstanten C, K existieren, so dass*

$$|r_N(z; f)| \;\leq\; C\, K^N\, \Gamma(1 + s\, N) \qquad \forall\, z \in \overline{S}\,, \quad N \geq 0\,. \tag{5.6.1}$$

Wir schreiben dann $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ in G, und sagen auch dass f die Gevrey-Asymptotik $\hat{f}(z)$ der Ordnung s *besitzt.*

Bemerkung 5.6.2 *Im Fall $s = 0$ folgt aus $f(z) \cong_0 \hat{f}(z)$ in G, dass die Potenzreihe für $z \in G$ mit $|z|\, K < 1$ gegen f konvergiert. Daraus folgt dass f insbesondere unverzweigt sein muss.*

Aufgabe 5.6.3 *Seien $f \in \mathcal{H}(G)$ und $s > 0$ sowie $k = 1/s$. Zeige dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind:*

(a) *Es gilt $f(z) \cong_s \hat{0}(z)$ in G, wobei $\hat{0}(z)$ die Nullreihe, also die Potenzreihe, deren Koeffizienten alle verschwinden, bezeichnet.*

(b) *Zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ gibt es Zahlen $C, K > 0$ so, dass*

$$|f(z)| \;\leq\; C\, \exp[-|z|^k / K] \qquad \forall\, z \in \overline{S}\,. \tag{5.6.2}$$

Anleitung: *Zeige zunächst dass aus* (a) *für jedes $\overline{S} \subset G$ die Existenz von $C, K > 0$ folgt, für welche $|f(z)| \leq C\, (|z| K)^x\, \Gamma(1 + s\, x)$ für alle $x \geq 1$ und alle $z \in \overline{S}$ gilt. Wähle dann für kleine Werte von $|z|$ die Zahl x in Abhängigkeit von z so, dass die rechte Seite minimal wird.*

Lemma 5.6.4 *Für $f \in \mathcal{H}(G)$ und $s \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist im Nullpunkt beliebig oft differenzierbar, und zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ gibt es Konstanten $C, K > 0$ so, dass*

$$|f^{(k)}(z)| \;\leq C\, K^k\, k!\, \Gamma(1 + sk) \qquad \forall\, k \geq 0\,,\; z \in \overline{S}\,. \tag{5.6.3}$$

(b) *Es gibt ein $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ so, dass $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ in G ist.*

Falls dies so ist, dann folgt (5.2.3)*, und hieraus folgt*

$$|f_k| \;\leq\; C\, K^k\, \Gamma(1 + s\, k) \qquad \forall\, k \geq 0\,. \tag{5.6.4}$$

Beweis: Geht ganz analog zum Beweis von Lemma 5.2.2. □

Definition 5.6.5 *Wir sagen, dass eine Potenzreihe $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$* die Gevrey-Ordnung $s \geq 0$ *hat, wenn es Konstanten C, K gibt, für welche* (5.6.4) *gilt. Dies ist offensichtlich gleichbedeutend damit, dass die Reihe $g(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k / \Gamma(1{+}sk)$ einen positiven Konvergenzradius hat, also eine in einer Kreisscheibe um den Unrsprung holomorphe Funktion g definiert. Diese Funktion, bzw. ihre Potenzreihe, heißt auch* formale Boreltransformation *von $\hat{f}(z)$ der Ordnung s.*

Beispiel 5.6.6 *Für $|d| < \pi/2$ definieren wir*

$$f(z) \;=\; \int_0^{\infty(d)} \frac{\mathrm{e}^{-w}}{1 + wz}\, dw\,, \qquad |d + \arg z| < \pi\,, \tag{5.6.5}$$

wobei die Integration entlang des Strahles $\arg w = d$ *ausgeführt wird. Das Integral ist in dem angegeben Sektor absolut und kompakt konvergent und stellt deshalb dort eine holomorphe Funktion dar. Mit dem Cauchyschen Integralsatz zeigt man, dass sich der Wert* $f(z)$ *nicht ändert, wenn man* d *variiert, und deshalb kann* f *in den Sektor* $S(0, 3\pi/2)$ *fortgesetzt werden. Durch Vertauschen von Integration und Ableitung zeigt man für* $k \geq 0$

$$f^{(k)}(z) \;=\; (-1)^k\, k! \int_0^{\infty(d)} \frac{\mathrm{e}^{-w}}{(1+wz)^{k+1}}\, dw\,, \qquad |d + \arg z| < \pi\,, \tag{5.6.6}$$

und durch Abschätzen dieses Integrales erhält man, dass $|f^{(k)}(z)| \leq C\, K^k\, (k!)^2$ *für* z *in einem beliebigen abgeschlossenen Teilsektor von* $S(0, 3\pi/2)$*, wobei* C *und* K *von dem Teilsektor abhängen, aber von* k *unabhängig sind. Dies zeigt dass* f *in* $S(0, 3\pi/2)$ *eine Gevrey-Asymptotik der Ordnung* $s = 1$ *hat, und durch Einsetzen von* $z = 0$ *in* (5.6.6) *findet man* $f(z) \cong_1 \sum_0^\infty k!\, z^k$.

Beispiel 5.6.7 $f(z) = \exp[-z^{-s}]$.

5.7 Gevrey-Asymptotiken in schmalen Sektoren

Satz 5.7.1 (Satz von Gevrey-Ritt) *Für jedes* $s > 0$*, jedes sektorielle Gebiet* G *mit Öffnungswinkel höchstens gleich* $s\,\pi$*, und jede formale Potenzreihe* $\hat f(z)$ *von Gevrey-Ordnung* s *gibt es ein* $f \in \mathcal{H}(G)$ *mit* $f(z) \cong_s \hat f(z)$ *in* G.

Beweis: Nach Definition der Gevrey-Ordnung einer Potenzreihe ist die formale Boreltransformation $g(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k/\Gamma(1+sk)$ der Ordnung s für hinreichend kleines $r > 0$ im Kreis $|z| < r$ holomorph. Wir wählen ein ρ mit $0 < \rho < r$ und schließen aus der Cauchyschen Integralformel auf die Existenz von $C, K > 0$ mit

$$|g^{(j)}(z)| \;\leq\; C\, K^j\, j! \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,, \quad |z| \;\leq\; \rho\,.$$

Wir setzen die Funktion g außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius ρ gleich der Nullfunktion und erhalten so eine in allen Punkten z außer den Randpunkten des Kreises holomorphe Funktion, und die obige Abschätzung ihrer Ableitungen gilt ebenfalls in all diesen Punkten. Jetzt wählen wir ein $d \in \mathbb{R}$ und definieren

$$f(z) \;=\; z^{-\kappa} \int_0^{\infty(d)} g(u)\; \exp[-(u/z)^\kappa]\; du^\kappa \;=\; \int_0^{\infty(d_z)} g(z\, w^s)\; \mathrm{e}^{-w}\; dw\,,$$

wobei $\kappa = 1/s$, $d_z = \kappa\,(d - \arg z)$ und $du^\kappa = \kappa\, u^{\kappa-1}\, du$ ist. Diese Funktion ist ganz und heißt *die endliche Laplacetransformation von* f *der Ordnung* k. Ihre Ableitungen erhält man, indem man den Integranden im zweiten Integral nach z differenziert, wobei an einer Stelle nur die einseitigen Ableitungen existieren. Daraus ergibt sich

$$f^{(j)}(z) \;=\; \int_0^{\infty(d_z)} g^{(j)}(z\, w^s)\; w^{sj}\; \mathrm{e}^{-w}\; dw \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0 \tag{5.7.1}$$

Weiter sei jetzt z so, dass $|d_z| < \pi/2$. Dann folgt aus der Definition der Gammafunktion mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzesflach

$$\Gamma(1+sk) \;=\; \int_0^{\infty(d_z)} w^{sk}\; \mathrm{e}^{-w}\; dw\,.$$

Daraus ergibt sich, unter Benutzung der obigen Abschätzung der Ableitungen von g, dass

$$|f^{(j)}(z)| \;\leq\; C\, K^j\, \Gamma(1+sk)\, j! \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,, \quad |d - \arg z| \;\leq\; s\,\pi/2\,.$$

Weiter folgt aus (5.7.1) dass alle Ableitungen im Nullpunkt stetig sind, und dass $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)\Gamma(1+sj)$ ist. Da d beliebig ist, ergibt sich hieraus die Behauptung. □

5.8 Gevrey-Asymptotiken in großen Sektoren

Der folgende Satz ist eine Variante des Maximum-Prinzips und wird im Folgenden benötigt. Beachte, dass die Aussage des Satzes trivial richtig ist, wenn die rechte Seite der zweiten Ungleichung unendlich ist.

Satz 5.8.1 (Phragmén-Lindelöf) *Seien $s > 0$ und $S = \{z : \ |z| > \rho_0\,,\ \alpha < \arg z < \beta\}$ ein Sektor, mit $\rho_0 > 0$ und $0 < \beta - \alpha < s\,\pi$. Sei f in S holomorph und auf dem Rand von S stetig. Falls dann Konstanten $C, K > 0$ existieren, für welche*

$$|f(z)| \ \le\ C\ \exp[K\,|z|^k] \qquad \forall\ z \in S\,,$$

wobei $k = 1/s$ ist, dann folgt

$$|f(z)| \ \le\ \sup_{u \in \partial S}\ |f(u)| \qquad \forall\ z \in S\,,$$

wobei ∂S den Rand von S bezeichnet.

Beweis: Eine Substitution $z \longmapsto a\,z$ mit $|a| = 1$ kann dazu benutzt werden, den Sektor S zu drehen. Da sich dabei sonst nichts verändert, können wir o. B. d. A. annehmen dass $\beta = -\alpha$ ist. Für $\kappa > k$ und $\varepsilon > 0$ ist $\exp[-\varepsilon z^\kappa]$ in S fallend, falls nur $\kappa - k$ hinreichend klein ist. Somit gilt $g(z) := f(z)\ \exp[-\varepsilon z^\kappa] \longrightarrow 0$ in S. Für alle $z \in \partial S$ folgt dass $|g(z)| \le m$ ist, mit $m := \sup_{u \in \partial S}\ |f(u)|$, unabhängig von ε und κ. Aus dem Maximumprinzip folgt dieselbe Abschätzung dann auch für $z \in S$, und für $\varepsilon \longrightarrow 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 5.8.2 (Watsons Lemma) *Sei $s > 0$, und sei G ein sektorielles Gebiet mit Öffnungswinkel $> s\,\pi$. Wenn f holomorph in G ist, und wenn f in G die Nullreihe als Gevrey-Asymptotik der Ordnung s hat, dann ist f die Nullfunktion.*

Beweis: Sei $\overline{S}$ ein abgeschlossener Teilsektor von G mit Öffnungswinkel $\alpha > s\,\pi$ und Mittelrichtung d. Es gilt dann (5.6.2) für geeignete $C, K > 0$, und insbesondere ist f auf $\overline{S}$ betragsmäßig durch C beschränkt. Mit $\kappa = \pi/\alpha < k$ und $a = r\,\mathrm{e}^{-d\kappa}$, $r > 0$, folgt dass $a\,z$ genau dann in der abgeschlossenen rechten Halbebene liegt, wenn $z \in \overline{S}$ ist. Die Funktion $g_r(z) := f(z)\,\mathrm{e}^{a z^\kappa}$ ist daher (wegen $\kappa < k$ und (5.6.2)) auf $\overline{S}$ beschränkt, und auf dem Rand des Sektors ist $|g_r(z)| = |f(z)| \le C$ (unabhängig von r). Aus dem Satz von Phragmén-Lindelöf folgt die gleiche Abschätzung auch im Inneren von $\overline{S}$, und daher folgt für $r \longrightarrow \infty$ dass $f(z) = 0$ sein muss. □

Literaturverzeichnis

[1] **L. V. Ahlfors**, *Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966.

[2] **H. Behnke und F. Sommer**, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer Verlag, 3. Aufl., 1976.

[3] **J. B. Conway**, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1978.

[4] **O. Forster**, *Riemannsche Flächen.*, Heidelberger Taschenbücher. Band 184. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. X, 223 S. mit 6 Fig. DM 24.80; $ 11.00 , 1977.

[5] **E. Freitag und R. Busam**, *Funktionentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[6] **A. Hurwitz**, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer, Berlin, 1999.

[7] **K. Knopp**, *Funktionentheorie. I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. 9. neubearb. Aufl.*, Sammlung Göschen Band 668. Berlin: Walter de Gruyter, 1957.

[8] ——, *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 7. Aufl.*, Sammlung Göschen. 878. Berlin: Walter de Gruyter, 1971.

[9] ——, *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. I. Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 8. Aufl.*, Sammlung Göschen. 2127. Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1977.

[10] ——, *Elemente der Funktionentheorie. 9. Aufl.*, Sammlung Göschen. 2124. Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1978.

[11] ——, *Funktionentheorie. II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. 13. Aufl.*, Sammlung Göschen, 2126. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1981.

[12] **R. Remmert**, *Funktionentheorie I*, Springer, Berlin, 1995.

[13] **W. Rudin**, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenbourg, München, 1999.

[14] **H.-J. Runckel**, *Höhere Analysis - Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen*, Oldenbourg, München, 2000.

Index