



Vorlesungsmanuskript zu
**Höhere Mathematik für
Elektrotechniker III**

Werner Balsler
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2009/10



Inhaltsverzeichnis

1	Matrizen und Determinanten	4
1.1	Matrizen	4
1.2	Permutationen	5
1.3	Definition der Determinante	6
1.4	Rechenregeln für Determinanten	7
1.5	Multiplikation von Matrizen	9
1.6	Lineare Gleichungssysteme	10
1.7	Weitere Eigenschaften von Determinanten	12
1.8	Inverse Matrix	12
2	Lineare Algebra	14
2.1	Lineare Räume, lineare Unabhängigkeit	14
2.2	Unterräume	15
2.3	Dimension und Basis	16
2.4	Lineare Abbildungen	17
2.5	Euklidische bzw. unitäre Vektorräume	19
2.6	Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen	22
2.7	Normalformen	24
2.8	Definite Matrizen	25
3	Der Jordan-Inhalt	27
3.1	Definition des Inhalts	27
3.2	Charakterisierung der Messbarkeit	28
3.3	Berechnung von Inhalten	29

3.4	Bewegungsinvarianz des Inhalts	30
4	Das mehrdimensionale Integral	32
4.1	Die Definition	32
4.2	Eigenschaften des Bereichsintegrals	33
4.3	Mittelwertsätze und gliedweise Integration	35
4.4	Der Satz von Fubini	36
4.5	Die Substitutionsregel	37
5	Kurvenintegrale, Stammfunktionen	38
5.1	Kurven, Rektifizierbarkeit, Wege	38
5.2	Kurvenintegrale von Vektorfunktionen	40
5.3	Wegunabhängigkeit und Stammfunktionen	41
5.4	Die Integrabilitätsbedingungen	42
5.5	Kurvenintegrale von skalaren Funktionen	44
6	Vektoranalysis und Integralsätze	45
6.1	Krummlinige Koordinaten	45
6.2	Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene	48
6.3	Vektorprodukt und Flächen im Raum	49
6.4	Der Stokessche Integralsatz	50
6.5	Der Gaußsche Integralsatz	50

Kapitel 1

Matrizen und Determinanten

Im Folgenden werden einige Begriffe aus dem ersten Semester wiederholt und weitere Eigenschaften von Matrizen beziehungsweise allgemeinen linearen Gleichungssystemen vorgestellt.

1.1 Matrizen

Definition 1.1.1 Ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{jk} \in \mathbb{C},$$

heißt eine $m \times n$ -Matrix, oder eine Matrix vom Typ $m \times n$. Die Zahlen a_{jk} heißen die Elemente von A , und wir schreiben manchmal auch kurz $A = [a_{jk}]$. Die $m \times 1$ -Matrizen

$$s_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

heißen die Spalten von A , die $1 \times n$ -Matrizen

$$z_j = [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}], \quad 1 \leq j \leq m,$$

werden die Zeilen von A genannt. Also hat eine Matrix vom Typ $m \times n$ gerade m Zeilen und n Spalten. Im Fall $n = m$ sprechen wir von einer quadratischen Matrix. Zwei Matrizen A und B vom gleichen Typ $m \times n$ werden addiert, indem man zu jedem Element von A das an der gleichen Stelle stehende Element von B hinzuzählt. Anders ausgedrückt heißt das:

$$A = [a_{jk}], \quad B = [b_{jk}] \implies A + B = [a_{jk} + b_{jk}].$$

Eine Matrix A wird mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{C}$ multipliziert, indem man jedes ihrer Elemente mit λ multipliziert.

Bemerkung 1.1.2 Für die Addition von Matrizen gelten ein Assoziativ- und ein Kommutativgesetz. Die Matrix entsprechender Größe, deren Elemente alle gleich 0 sind, wird Nullmatrix genannt und spielt bei der Addition die Rolle des Nullelementes, und die Matrix $-A = [-a_{jk}]$ ist das additive Inverse zu A . Für die Multiplikation mit einem Faktor gelten ein Assoziativ- sowie zwei Distributivgesetze.

Aufgabe 1.1.3 Entscheide, welche der folgenden Matrizen addiert werden können, und berechne gegebenenfalls ihre Summe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Multipliziere alle diese Matrizen mit dem Faktor $\lambda = 2$.

1.2 Permutationen

Definition 1.2.1 Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation der Zahlen $1, \dots, n$. Die Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$ heißt die symmetrische Gruppe S_n . Für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ heißt die Hintereinanderausführung $\sigma_1 \circ \sigma_2$ auch das Produkt von σ_1, σ_2 , wobei die Reihenfolge zu beachten ist!

Beispiel 1.2.2 Eine Permutation σ ist bereits durch die Festlegung der Bilder $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ eindeutig festgelegt. Wir schreiben deshalb etwa

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{array} \right) = \left(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n) \right).$$

Ist z. B. $n = 4$, und wählt man

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right), \quad \sigma_2 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right),$$

so ist das Produkt von σ_1 und σ_2 gleich

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Definition 1.2.3 Sei $\sigma \in S_n$. Ein Zahlenpaar (j, k) , mit $1 \leq j < k \leq n$, heißt eine Inversion oder ein Fehlstand von σ , wenn $\sigma(j) > \sigma(k)$ ist. Wir setzen das Vorzeichen oder Signum $\text{sgn}(\sigma)$ gleich 1, bzw. gleich -1 , wenn die Anzahl aller Inversionen von σ gerade, bzw. ungerade, ist. Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt eine Transposition, falls ein Zahlenpaar (j, k) , mit $1 \leq j < k \leq n$, existiert, welches durch τ vertauscht wird, während alle anderen Zahlen von τ festgelassen werden; d. h. genauer

$$\tau(j) = k, \quad \tau(k) = j, \quad \tau(\ell) = \ell \quad \forall \ell \neq j, k, \quad 1 \leq \ell \leq n.$$

Die identische Abbildung $\text{id} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heißt auch identische Permutation.

Beispiel 1.2.4 Die identische Permutation id besitzt keinen Fehlstand, also ist $\text{sgn}(\text{id}) = 1$. Für $\sigma = (1, 2, 4, 3)$ gibt es genau einen Fehlstand, nämlich das Paar $(3, 4)$. Deshalb ist $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

Satz 1.2.5 (Eigenschaften von Permutationen)

- (a) Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen in S_n .
- (b) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n : \text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$.
- (c) Alle Transpositionen haben Vorzeichen -1 .

(d) Für jedes $\sigma \in S_n$ ist $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

(Ohne Beweis)

Aufgabe 1.2.6 Berechne das Vorzeichen der Permutationen $\sigma_1 = (2, 1, 3, 4)$ und $\sigma_2 = (2, 3, 4, 1)$.

Lösung: σ_1 hat nur den Fehlstand $(1, 2)$, also ist $\operatorname{sgn} \sigma_1 = -1$. Für σ_2 sind $(1, 4)$, $(2, 4)$ und $(3, 4)$ Fehlstände, und deshalb ist $\operatorname{sgn} \sigma_2 = -1$. \square

1.3 Definition der Determinante

Definition 1.3.1 Für eine $n \times n$ -Matrix heißt die Zahl

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante von A .

Beispiel 1.3.2 Für $n = 1$ ist $A = [a]$ und $\det A = a$. Für $n = 2$ gibt es zwei Permutationen in S_2 , nämlich

$$\sigma_1 = \operatorname{id} = (1, 2), \quad \sigma_2 = (2, 1).$$

Das Vorzeichen von σ_2 ist -1 , und deshalb folgt

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Im Fall $n = 3$ hat S_3 sechs Elemente, nämlich

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \operatorname{id} &= (1, 2, 3) & \sigma_2 &= (2, 3, 1), & \sigma_3 &= (3, 1, 2), \\ \sigma_4 &= (1, 3, 2) & \sigma_5 &= (2, 1, 3), & \sigma_6 &= (3, 2, 1), \end{aligned}$$

wobei die ersten bzw. letzten drei Permutationen das Vorzeichen 1 bzw. -1 haben. Deshalb ist

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Diese Formel heißt auch Sarrussche Regel. Für $n = 4$ enthält die in der Definition stehende Formel für die Determinante bereits 24 Terme und ist für die Berechnung ungeeignet! Wir werden aber einen effektiven Algorithmus zur Berechnung der Determinante kennen lernen.

Aufgabe 1.3.3 Berechne die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1.3.4 Beweise die Formel

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

und überlege, ob eine analoge Formel auch für größere Matrizen gilt.

Lösung: Da $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$ sind, folgt die Behauptung aus der Sarrusschen Regel. Für beliebiges n sei A so, dass $a_{jk} = 0$ ist sobald $j > k$ ist. Das bedeutet, dass in der Definition der Determinante nur solche Terme stehen bleiben, für die immer $j \leq \sigma(j)$ ist. Dies ist aber nur für die identische Permutation der Fall, und deshalb ist

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

□

Aufgabe 1.3.5 Überprüfe mit Hilfe der Definition folgende Regel für Determinanten: Falls eine Zeile oder eine Spalte einer quadratischen Matrix A nur Nullen enthält, ist $\det A = 0$.

1.4 Rechenregeln für Determinanten

Definition 1.4.1 Für eine beliebige $m \times n$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

heißt die neue Matrix

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

welche die Zeilen von A als Spalten enthält und umgekehrt, die transponierte Matrix zu A . Für eine quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

heißten die Zahlen a_{11}, \dots, a_{nn} die Diagonalelemente von A . Falls $a_{jk} = 0$ ist für alle $k < j$, d. h., wenn alle Elemente unterhalb der Diagonalen verschwinden, dann heißt A eine obere Dreiecksmatrix. Falls dagegen $a_{jk} = 0$ ist für alle $k > j$, dann sprechen wir von einer unteren Dreiecksmatrix. Falls sogar beides gilt, d. h., falls alle Elemente außer evtl. den Diagonalelementen verschwinden, dann heißt A eine Diagonalmatrix. Die Matrix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

heißt die n -reihige Einheitsmatrix. Wenn man das sogenannte Kronecker-Delta

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases}$$

einführt, kann man sagen, dass I die Elemente δ_{jk} hat.

Satz 1.4.2 (Rechenregeln für Determinanten) Für jede n -reihige quadratische Matrix A gilt:

- (a) Entsteht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen, so ist $\det B = -\det A$.
- (b) Entsteht B aus A durch Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\det B = \lambda \det A$.
- (c) Entsteht B aus A , indem man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert, so ist $\det B = \det A$.
- (d) Falls A eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist, dann ist ihre Determinante gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.
- (e) $\det A = \det A^T$, $\det I = 1$.

Die Regeln (a) – (c) gelten auch für die Spalten an Stelle der Zeilen von A .

(Ohne Beweis)

Aufgabe 1.4.3 Zeige: Wenn eine quadratische Matrix zwei gleiche Zeilen oder zwei gleiche Spalten enthält, dann ist ihre Determinante gleich 0.

Mit Hilfe der obigen Rechenregeln kann man auch größere Determinanten relativ leicht berechnen. Dabei benutzt man folgenden Algorithmus, welcher auch als *Gaußsches Eliminationsverfahren* bezeichnet wird:

- Falls die erste Spalte von A nur Nullen enthält, ist $\det A = 0$. Sonst suche in der ersten Spalte der Matrix A ein Element $a_{j1} \neq 0$ und vertausche die j -te Zeile von A mit der ersten, außer falls $j = 1$ ist. Danach ziehe Vielfache der ersten Zeile von allen anderen ab, so dass alle anderen Elemente der ersten Spalte durch Nullen ersetzt werden.

Durch diese Schritte wird aus A eine Matrix B der Form

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

und für diesen Fall gilt $\det A = \det B$ falls wir keine Zeilen vertauschen mussten bzw. $\det A = -\det B$ sonst, und

$$\det B = b_{11} \det \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Das bedeutet, dass wir die Berechnung der Determinante von A auf die Berechnung einer Determinante einer kleineren Matrix zurückgeführt haben! Diese Determinante kann wieder nach dem gleichen Schema berechnet werden.

Aufgabe 1.4.4 Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 1.4.5 In dem oben eingeführten Verfahren zur Berechnung einer Determinante kann man auch die entsprechenden Operationen für Spalten verwenden, wenn dies vorteilhaft erscheint. Außerdem folgt aus der Definition, dass die Determinante eine ganze Zahl ist, falls die Elemente der Matrix ganzzahlig sind. Dies kann zur Kontrolle der Rechnung genutzt werden.

1.5 Multiplikation von Matrizen

Definition 1.5.1 Wir setzen für $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$

$$[a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j b_j.$$

Das heißt: Für eine Zeile und eine Spalte gleicher Länge ist jeweils ein Produkt definiert. Wenn A und B Matrizen sind, und wenn die Zeilen von A dieselbe Länge wie die Spalten von B haben, dann definieren wir das Produkt AB als die Matrix $C = [c_{jk}]$, für die c_{jk} gerade das Produkt der j -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B ist. Mit anderen Worten: Ist

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{bmatrix},$$

so ist $AB = [c_{jk}]$ mit

$$c_{jk} = \sum_{\nu=1}^n a_{j\nu} b_{\nu k}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Aufgabe 1.5.2 Berechne die Produkte folgender Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ 2 & a+b \end{bmatrix}.$$

Lösung: Das Ergebnis ist

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} -a+2 & 2b+a \\ a+6 & 3a+2b \end{bmatrix}.$$

□

Bemerkung 1.5.3 Für die Multiplikation von Matrizen gelten ein Assoziativ- und zwei Distributivgesetze, aber kein Kommutativgesetz. Die Einheitsmatrix I spielt die Rolle des Einselementes der Multiplikation.

Beispiel 1.5.4 Für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

gilt offenbar

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}, \quad XA = \begin{bmatrix} x_{12} & 0 \\ x_{22} & 0 \end{bmatrix},$$

und daraus folgt $A^2 = AA = 0$. Das bedeutet, dass eine Matrixgleichung $AX = B$ im Allgemeinen keine Lösung haben wird, und wenn doch, braucht die Lösung nicht eindeutig bestimmt zu sein.

1.6 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.6.1 Eine $n \times 1$ -Matrix heißt auch ein Vektor, genauer: ein Spaltenvektor, der Länge n . Die Menge aller solcher Vektoren wird mit \mathbb{C}^n bezeichnet. Falls wir ausdrücklich festlegen wollen, dass alle Elemente der Vektoren reelle Zahlen sein sollen, schreiben wir auch \mathbb{R}^n . Ein Element aus \mathbb{C}^n oder \mathbb{R}^n schreiben wir meist in der Form

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T.$$

Statt eckigen Klammern darf man bei Vektoren auch runde Klammern verwenden. Der Vektor $0 = (0, \dots, 0)^T$ heißt auch Nullvektor. Mit diesen Bezeichnungen und

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ist die Gleichung $Ax = b$ äquivalent mit den m linearen Gleichungen in n Unbekannten x_1, \dots, x_n

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Deshalb nennen wir $Ax = b$ auch ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem. Die Matrix A heißt auch Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, und b heißt Inhomogenitätenvektor. Die Gleichung $Ax = 0$ heißt die zugehörige homogene Gleichung oder homogenes Gleichungssystem. Wir schreiben auch $L(A, b)$ für die Menge aller Vektoren x , welche die Gleichung $Ax = b$ erfüllen, und $L(A)$ für die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $Ax = 0$.

Satz 1.6.2 (Struktur der Lösungsmenge) Für A und b wie in obiger Definition gilt:

- (a) $x_p \in L(A, b), \quad x_h \in L(A) \implies x_p + x_h \in L(A, b).$
- (b) $x_1, x_2 \in L(A, b) \implies x_1 - x_2 \in L(A).$
- (c) $x_1, x_2 \in L(A), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \implies \alpha x_1 + \beta x_2 \in L(A).$

Beweis: Zu (a): $A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + 0 = b$. Zu (b): $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$. Zu (c): $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = 0$. \square

Bemerkung 1.6.3 Wir werden später sehen, dass $L(A, b)$ leer sein kann; beachte, dass dies nicht dem Teil (a) des obigen Satzes widerspricht!

Definition 1.6.4 Die Matrix

$$(A, b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

heißt die erweiterte Matrix des Gleichungssystems $Ax = b$. Folgende drei Operationen bei Matrizen nennt man elementare Zeilenoperationen:

- Vertauschen zweier Zeilen einer Matrix.
- Multiplikation einer Zeile einer Matrix mit einem von 0 verschiedenen Faktor.
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Sinngemäß definiert man auch elementare Spaltenoperationen.

Es ist leicht einzusehen, dass die Lösungsmenge $L(A, b)$ bei elementaren Zeilenoperationen für die erweiterte Matrix unverändert bleibt. Daher kann man die Lösungsmenge von $Ax = b$ durch das *Gaußsche Eliminationsverfahren* ermitteln:

1. Falls $A = 0$ ist, brich ab. Sonst weiter mit 2.
2. Suche die Spalte von A mit der niedrigsten Nummer, welche nicht nur Nullen enthält; ihre Nummer sei gleich k , und j sei so, dass $a_{jk} \neq 0$ ist. Vertausche in der erweiterten Matrix die Zeile Nr. j mit der ersten. Subtrahiere danach Vielfache der ersten von allen folgenden Zeilen, um in der k -ten Spalte alle Elemente mit Nummern (j, k) , $2 \leq j \leq m$, zu 0 zu machen. Ist dies geschehen, hat die neue erweiterte Matrix die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cccc|c} 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1k} & \tilde{a}_{1,k+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \tilde{A} & \tilde{b} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \end{array} \right],$$

wobei $\tilde{a}_{1k} \neq 0$ ist. Danach wenden wir dieselben Schritte 1. und 2. auf die kleinere Matrix (\tilde{A}, \tilde{b}) wieder an.

Das oben beschriebene Verfahren führt in endlich vielen Schritten zu einer Endmatrix, welche wir der Einfachheit halber wieder mit (A, b) bezeichnen wollen. Diese neue erweiterte Matrix besitzt die sogenannte *Zeilenstufenform* und hat deshalb folgende Eigenschaften: Eventuell enthalten einige der untersten Zeilen nur noch Nullen; diese sind für die Bestimmung der Lösungsmenge ohne Bedeutung und können deshalb weggelassen werden. Wenn danach in der untersten Zeile nur rechts im Inhomogenitätenteil eine von 0 verschiedene Zahl steht, ergibt sich ein Widerspruch und die Lösungsmenge ist deshalb leer. Sonst suche in der untersten Gleichung die am weitesten links gelegene Stelle, in der ein von Null verschiedener Koeffizient steht; diese Stelle habe die Nummer k . Dann können in der untersten Gleichung evtl. alle der Unbekannten mit höherer Nummer beliebig gewählt und dann die Gleichung nach der Unbekannten x_k aufgelöst werden. Setzt man die so erhaltenen Unbekannten in die darüberstehenden Gleichungen ein, kann man danach mit der vorausgehenden Gleichung genauso verfahren. Insgesamt kann man auf diese Weise die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ermitteln. Sie kann nur aus einem Vektor bestehen, kann aber auch einen oder mehrere *freie Parameter enthalten*. Wir wollen dies noch in einigen Beispielen deutlicher sehen.

Aufgabe 1.6.5 Löse

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2. \end{array}$$

Aufgabe 1.6.6 Löse

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -2. \end{array}$$

Aufgabe 1.6.7 Löse

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\x_2 + x_3 &= 1, \\x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3/2.\end{aligned}$$

1.7 Weitere Eigenschaften von Determinanten

Satz 1.7.1 (Determinantenmultiplikationssatz) Für zwei quadratische n -reihige Matrizen A und B gilt immer

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

(Ohne Beweis)

Lemma 1.7.2 (Dreieckig geblockte Matrizen) Seien A_{11} vom Typ $n_1 \times n_1$, A_{22} vom Typ $n_2 \times n_2$ und A_{12} vom Typ $n_1 \times n_2$. Dann gilt

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \det A_{22}.$$

(Ohne Beweis)

Definition 1.7.3 Sei $n \geq 2$, und sei A eine n -reihige quadratische Matrix. Die Determinante der Matrix, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und der k -ten Spalte entsteht, wird mit d_{jk} bezeichnet und heißt ein Minor von A .

Satz 1.7.4 (Entwicklungssatz) Sei A eine quadratische n -reihige Matrix mit $n \geq 2$, und sei ein $k \in \{1, \dots, n\}$ ausgewählt. Dann gelten die Gleichungen

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} d_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} d_{kj}.$$

(Ohne Beweis)

Aufgabe 1.7.5 Berechne mit Hilfe des Entwicklungssatzes $\det A$ für

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.8 Inverse Matrix

Definition 1.8.1 Falls zu einer quadratischen Matrix A eine andere quadratische Matrix B existiert, für die

$$AB = I$$

ist, dann heißt die Matrix A invertierbar, und B heißt die inverse Matrix zu A . Statt B schreiben wir dann auch A^{-1} .

Satz 1.8.2 Eine n -reihige quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist. Wenn dem so ist, dann ist die inverse Matrix eindeutig bestimmt, und es gilt auch immer $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Mit anderen Worten: Die inverse Matrix zu A^{-1} ist A .

Beweis: Aus $AB = I$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz $1 = \det I = \det A \det B$, also muss $\det A \neq 0$ sein. Wenn $\det A \neq 0$ ist, sei

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d_{11} & -d_{21} & d_{31} & \dots & (-1)^{1+n} d_{n1} \\ -d_{12} & d_{22} & -d_{32} & \dots & (-1)^{2+n} d_{n2} \\ d_{13} & -d_{23} & d_{33} & \dots & (-1)^{3+n} d_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Dann folgt aus dem Entwicklungssatz $AB = BA = I$. Schließlich gilt für diese Matrix B :

$$AC = I \implies B = BI = BAC = IC = C.$$

Also gibt es höchstens eine inverse Matrix zu A . □

Satz 1.8.3 (Cramersche Regel) Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann ist für beliebiges $b \in \mathbb{C}^n$ das Gleichungssystem $Ax = b$ immer eindeutig lösbar, und die Lösung ist gleich $x = A^{-1}b$. Ausgeschrieben heißt dies

$$x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d_{jk} b_j.$$

Beweis: Es ist $Ax = b \iff A^{-1}b = A^{-1}Ax = Ix = x$. □

Aufgabe 1.8.4 Zeige: Für eine zweireihige quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0,$$

ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Kapitel 2

Lineare Algebra

2.1 Lineare Räume, lineare Unabhängigkeit

Im Folgenden sei \mathbb{K} wieder gleich \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Wir nennen \mathbb{K} auch den *Skalkörper*, und ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt manchmal auch ein *Skalar*.

Definition 2.1.1 Eine Menge V , zusammen mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (v, w) \longmapsto v + w,$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v \quad (= \lambda v),$$

heißt ein linearer Raum oder ein Vektorraum über \mathbb{K} , wenn folgende Axiome alle gelten:

$$(V1) \quad \forall u, v, w \in V : \quad u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{Assoz.-Ges. der Addit.})$$

$$(V2) \quad \exists 0 \in V \quad \forall v \in V : \quad v + 0 = v \quad (\text{Existenz eines Nullvektors})$$

$$(V3) \quad \forall v \in V \quad \exists \tilde{v} \in V : \quad v + \tilde{v} = 0 \quad (\text{Exist. eines additiven Inversen})$$

$$(V4) \quad \forall v_1, v_2 \in V : \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad (\text{Kommutativges. der Addition})$$

$$(V5) \quad \forall v \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (\text{Assoz.-Ges. der Multiplik.})$$

$$(V6) \quad \forall v, w \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad (1. \text{ Distrib.-Ges.})$$

$$(V7) \quad \forall v \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad (2. \text{ Distrib.-Ges.})$$

$$(V8) \quad \forall v \in V : \quad 1v = v$$

Ist dies der Fall, so heißen die Elemente von V auch Vektoren.

Beispiel 2.1.2 Die folgenden Mengen V sind Vektorräume über \mathbb{K} :

1. Die Menge $V = \mathbb{K}^n$ aller Spaltenvektoren der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit Elementen in \mathbb{K} ; vergleiche hierzu auch Abschnitt 1.6.
2. Die Menge $V = \mathbb{K}^{n \times m}$ aller Matrizen mit n Zeilen und m Spalten und Elementen in \mathbb{K} .

3. Die Menge $V = C[a, b]$ aller stetigen Funktionen auf einem festen Intervall $[a, b]$ mit Werten in \mathbb{K} und der üblichen Addition und Multiplikation.
4. Die Menge $V = \mathbb{K}[x]$ aller Polynome mit Koeffizienten in \mathbb{K} .
5. Die Menge $V = \mathbb{K}_n[x]$ aller Polynome vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten in \mathbb{K} .
6. Die Menge aller Funktionen auf einem festen, nicht-leeren Definitionsbereich D , mit Werten in \mathbb{K} .

Im Folgenden bezeichnet V immer einen Vektorraum über \mathbb{K} . Mit Hilfe der Axiome kann man die folgenden weiteren Rechenregeln in V beweisen:

Behauptung 2.1.3 *In jedem Vektorraum V gelten folgende Aussagen:*

1. Es gibt nur einen Nullvektor in V , und zu jedem $v \in V$ gibt es nur ein additives Inverses, das wir im Folgenden auch mit $-v$ bezeichnen. Es gilt auch $-v = (-1)v$ für alle $v \in V$.
2. $\lambda v = 0 \iff \lambda = 0 \text{ oder } v = 0$ (oder beides).

(Ohne Beweis)

Definition 2.1.4 *Gegeben seien Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Für beliebige Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ heißt die Summe $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ eine Linearkombination der v_k . Die Menge aller Linearkombinationen von v_1, \dots, v_n heißt die lineare Hülle der v_1, \dots, v_n , in Zeichen $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls die Gleichung*

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0 \tag{2.1.1}$$

nur gilt, wenn alle $\lambda_k = 0$ sind. Ist dies nicht so, d. h., gilt (2.1.1) für mindestens eine Wahl von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die nicht alle gleich 0 sind, so heißen die Vektoren linear abhängig. Die Vektoren v_1, \dots, v_n heißen ein Erzeugendensystem, falls jeder Vektor aus V eine Linearkombination der v_k ist, d. h., falls $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V$ ist.

Aufgabe 2.1.5 *Zeige: Ein Vektor $v \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn v nicht der Nullvektor ist.*

Aufgabe 2.1.6 *Zeige: Zwei Vektoren v_1, v_2 sind genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.*

Aufgabe 2.1.7 *Zeige: Drei Vektoren in \mathbb{R}^2 sind immer linear abhängig.*

Aufgabe 2.1.8 *Seien a_1, \dots, a_m Vektoren in \mathbb{C}^n , und sei A die Matrix mit diesen Vektoren als Spalten. Zeige: Genau dann sind die Vektoren a_1, \dots, a_m linear unabhängig, wenn die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ nur aus dem Nullvektor besteht.*

2.2 Unterräume

Definition 2.2.1 *Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt ein Unterraum oder Teilraum, falls U abgeschlossen bezüglich der Addition und der Multiplikation mit Skalaren ist, d. h., falls gilt:*

(U1) $\forall v, w \in U : v + w \in U,$

(U2) $\forall v \in U \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda v \in U.$

Ist dies der Fall, so folgt dass U für sich betrachtet wieder ein linearer Raum ist, da dann alle Axiome erfüllt sind.

Aufgabe 2.2.2 Zeige: V selber sowie die Teilmenge $\{0\}$, welche also nur aus dem Nullvektor besteht, sind immer Unterräume von V . Man nennt diese beiden auch die trivialen Unterräume von V .

Aufgabe 2.2.3 Zeige: Für beliebige $v_1, \dots, v_n \in V$ ist $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ immer ein Unterraum. Man nennt deshalb $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ auch den von den Vektoren v_1, \dots, v_n aufgespannten Unterraum, oder den Spann von v_1, \dots, v_n .

2.3 Dimension und Basis

Definition 2.3.1 Ein Vektorraum V heißt endlich-dimensional, falls er ein Erzeugendensystem aus endlich vielen Vektoren besitzt; falls nicht, nennen wir ihn unendlich-dimensional. Vektoren v_1, \dots, v_n , welche zugleich ein Erzeugendensystem und linear unabhängig sind, heißen eine Basis von V . Man kann zeigen, dass ein endlich-dimensionaler Vektorraum immer eine Basis besitzt, und dass zwei verschiedene Basen desselben Vektorraums immer die gleiche Anzahl von Vektoren enthalten müssen. Deshalb definiert man die Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraums als die Anzahl der Vektoren in einer Basis. Wir schreiben $\dim V$ für die Dimension von V , wobei $\dim V = \infty$ sein soll, falls v unendlich-dimensional ist.

Aufgabe 2.3.2 Zeige: Ein Vektorraum V ist genau dann unendlich-dimensional, wenn es eine Folge $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ von Vektoren aus V gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Vektoren v_1, \dots, v_n immer linear unabhängig sind. Wir sagen dann auch, dass die ganze Folge $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 2.3.3 Zeige: Der Vektorraum $\mathbb{K}[x]$ aller Polynome ist unendlich-dimensional, der Unterraum $\mathbb{K}_n[x]$ aller Polynome vom Grad $\leq n$ hat die Dimension $n + 1$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2.3.4 Zeige: Die Vektoren $e_k \in \mathbb{K}^n$, deren Einträge alle gleich 0 sind bis auf eine 1 an der k -ten Stelle, bilden eine Basis von \mathbb{K}^n . Man nennt diese Basis die kanonische Basis in \mathbb{K}^n .

Satz 2.3.5 Seien v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k .$$

Diese Zahlen nennt man auch die Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis v_1, \dots, v_n .

Beweis: Da eine Basis immer ein Erzeugendensystem ist, muss es zu v Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ geben, für welche die obige Darstellung gilt. Wenn $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ so sind, dass $v = \sum_{k=1}^n \mu_k v_k$ gilt, folgt durch Subtraktion $0 = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \mu_k) v_k$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der v_1, \dots, v_n folgt hieraus aber $\lambda_k - \mu_k = 0$ für alle k . Deshalb sind die Koordinaten des Vektors v eindeutig festgelegt. \square

Satz 2.3.6 Ist U ein Unterraum von V , so folgt $\dim U \leq \dim V$. Ist $\dim U = \dim V < \infty$, so folgt $U = V$.

(Ohne Beweis)

2.4 Lineare Abbildungen

Definition 2.4.1 Seien V, W zwei Vektorräume über demselben Körper \mathbb{K} . Eine Abbildung $T : V \rightarrow W$ heißt linear, falls folgende zwei Regeln gelten:

$$(L1) \quad \forall v_1, v_2 \in V : T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2),$$

$$(L2) \quad \forall v \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

Beispiel 2.4.2 Sei $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, mit $n, m \in \mathbb{N}$, und sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten und Elementen in \mathbb{K} . Dann ist die Abbildung

$$x \mapsto Ax$$

eine lineare Abbildung von V nach W . Man kann zeigen, dass jede lineare Abbildung von \mathbb{K}^n nach \mathbb{K}^m von dieser Form ist.

Beispiel 2.4.3 Es folgt aus den Rechenregeln für Integrale, dass für jede auf einem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktion k die Zuordnung

$$f \mapsto \int_a^b k(x) f(x) dx$$

eine lineare Abbildung von $V = C[a, b]$ nach $W = \mathbb{K}$ ist. Aber nicht jede lineare Abbildung zwischen diesen Räumen ist von dieser Form; z. B. kann die Punktauswertung $f \mapsto f(x_0)$, für ein festes $x_0 \in [a, b]$, nicht so dargestellt werden. Das bedeutet, dass es die in der Physik beliebte Deltafunktion eigentlich gar nicht gibt!

Definition 2.4.4 Für eine lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ heißt

$$K(T) = \{ v \in V : T(v) = 0 \}$$

der Kern von T . Offenbar ist der Kern von T also genau die Lösungsmenge der Gleichung $T(v) = 0$. Die Menge

$$T(V) = \{ w \in W : \exists v \in V \text{ mit } T(v) = w \}$$

heißt auch das Bild von V in W . Also ist ein Vektor $w \in W$ genau dann im Bild von T , wenn die Gleichung $T(v) = w$ mindestens eine Lösung besitzt.

Satz 2.4.5 Für jede lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ ist $K(T)$ ein Unterraum von V und $T(V)$ ein Unterraum von W . Für ein $w \in T(V)$ sei $v_0 \in V$ so, dass $T(v_0) = w$ ist. Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $T(v) = w$ genau gleich

$$v_0 + K(T) = \{ v_0 + v : v \in K(T) \}.$$

Daher gilt offenbar, dass die Gleichung $T(v) = w$ für $w \in T(V)$ genau dann immer eindeutig lösbar ist, wenn $K(T)$ nur aus dem Nullvektor besteht.

Beweis: Seien $v_1, v_2 \in K(T)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0,$$

$$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1) = \lambda 0 = 0,$$

und deshalb ist $K(T)$ ein Unterraum von V . Für $w_1, w_2 \in T(V)$ gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $T(v_k) = w_k$, $1 \leq k \leq 2$. Deshalb ist $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in T(V)$, und $\lambda w_1 = \lambda T(v_1) = T(\lambda v_1) \in T(V)$. Also ist $T(V)$ ein Unterraum von W . Für $v \in K(T)$ ist $T(v_0 + v) = T(v_0) + T(v) = w + 0 = w$. Umgekehrt, ist $T(v_1) = w$, so folgt $w = T(v_1) = T(v_0 + (v_1 - v_0)) = T(v_0) + T(v_1 - v_0) = w + T(v_1 - v_0)$, und daraus folgt $T(v_1 - v_0) = 0$. Also ist $v_1 = v_0 + v$ mit $v = v_1 - v_0$, und $v \in K(T)$. \square

Satz 2.4.6 (Dimensionsformel) Für jede lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ gilt

$$\dim V = \dim T(V) + \dim K(T).$$

Weiter ist für $\dim V < \infty$ die Gleichung $T(v) = w$ genau dann für jedes $w \in W$ eindeutig lösbar, wenn $\dim W = \dim V$ ist.

(Ohne Beweis)

Definition 2.4.7 Für eine lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ heißt $\dim T(V)$ auch der Rang von T . Für eine beliebige Matrix A heißt die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten bzw. Zeilen auch der Spaltenrang bzw. Zeilenrang von A .

Satz 2.4.8 Für jede Matrix A ist immer der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang, und beide sind gleich dem Rang der linearen Abbildung $x \longmapsto Ax$.

(Ohne Beweis)

Definition 2.4.9 Der gemeinsame Wert von Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix A wird auch als Rang von A bezeichnet, und wir schreiben dafür auch kurz $\text{rang } A$.

Berechnung des Rangs einer Matrix: Der Rang einer Matrix verändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen, d. h., Vertauschen von zwei Zeilen, Multiplikation einer Zeile mit einer von 0 verschiedenen Zahl, und der Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen. Gleiches gilt auch bei Operationen mit Spalten an Stelle von Zeilen. Durch diese Umformungen kann die Matrix, wie beim Lösen von linearen Gleichungssystemen in Abschnitt 1.6, auf Zeilenstufenform bringen, und dann ist der Rang der Matrix genau gleich der Zahl der Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten. Siehe dazu auch die folgenden Beispiele und Aufgaben.

Beispiel 2.4.10 Der Rang einer Einheitsmatrix mit n Zeilen und Spalten ist immer gleich n , da alle Spalten linear unabhängig sind. Der Rang der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist gleich 2, denn A ist in Zeilenstufenform und hat 2 Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten.

Aufgabe 2.4.11 Berechne den Rang folgender Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wenn man die obigen Ergebnisse für lineare Abbildungen auf solche der Form $x \longmapsto Ax$, mit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, spezialisiert, erhält man die folgenden Resultate für lineare Gleichungssysteme:

Proposition 2.4.12 Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Dann gilt immer:

- (a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn der Rang von A gleich dem Rang der erweiterten Matrix (A, b) ist.

- (b) Die Lösungsmenge $L(A)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist ein Unterraum von \mathbb{C}^n der Dimension $n - \text{rang } A$. Mit anderen Worten: Es existieren $n - \text{rang } A$ linear unabhängige Lösungen von $Ax = 0$.
- (c) Falls A quadratisch ist, d. h., falls $m = n$ ist, dann ist $Ax = b$ genau dann für beliebiges $b \in \mathbb{K}^n$ lösbar, wenn der Rang von A gleich n ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $\det A \neq 0$ ist, und dann ist die Lösung immer eindeutig bestimmt, nämlich gleich $x = A^{-1} b$.

(Ohne Beweis)

Aufgabe 2.4.13 Finde heraus, wieviel linear unabhängige Lösungen die Gleichung $Ax = 0$ besitzt, wenn A wie in Aufgabe 2.4.11 ist.

2.5 Euklidische bzw. unitäre Vektorräume

Definition 2.5.1 Eine Abbildung, welche jedem Paar (v_1, v_2) von Vektoren eines Vektorraums V über \mathbb{K} einen Skalar $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{K}$ zuordnet, heißt ein Skalarprodukt oder inneres Produkt auf V , wenn folgende Regeln gelten:

$$(S1) \quad \forall v \in V : \quad \langle v, v \rangle \geq 0; \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0 .$$

$$(S2) \quad \forall v_1, v_2 \in V : \quad \langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle} .$$

$$(S3) \quad \forall v, v_1, v_2 \in V : \quad \langle v, v_1 + v_2 \rangle = \langle v, v_1 \rangle + \langle v, v_2 \rangle .$$

$$(S4) \quad \forall v_1, v_2 \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \quad \langle v_1, \lambda v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle .$$

Im Falle von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nennt man dann V auch euklidischen Raum, im anderen Fall auch einen unitären Raum. In beiden Fällen spricht man auch von einem Prä-Hilbertraum. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt immer eine reelle Zahl, und dann bedeutet (S2) einfach $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

Beispiel 2.5.2 Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

ein inneres Produkt, das sogenannte kanonische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n . Wenn nichts anderes gesagt ist, betrachten wir im Folgenden immer dieses kanonische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n . In \mathbb{C}^n ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$$

das entsprechende kanonische innere Produkt. Für zwei Funktionen $f, g \in C[a, b]$ ist ein kanonisches inneres Produkt durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

gegeben, wobei der Querstrich wegfallen kann, falls die Werte der Funktionen reell sind. Häufig gebraucht werden aber auch gewichtete innere Produkte von Funktionen. Dabei ist eine feste Gewichtsfunktion k gegeben, die bis auf endlich viele Punkte positive Werte annimmt, und man setzt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) k(x) dx .$$

Im Folgenden sei V immer ein Vektorraum mit innerem Produkt.

Definition 2.5.3 Für ein $v \in V$ heißt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die Norm oder Länge von v . Für $v_1, v_2 \in V$ heißt $\|v_1 - v_2\|$ auch Abstand zwischen v_1 und v_2 .

Satz 2.5.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Für $v_1, v_2 \in V$ gilt immer

$$|\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \|v_1\| \|v_2\| ,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn v_1 und v_2 linear abhängig sind.

(Ohne Beweis)

Korollar zu Satz 2.5.4 Für $v_1, v_2 \in V$ gilt immer die Dreiecksungleichung

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| .$$

Beweis: Aus obigem Satz und den Rechenregeln für ein Skalarprodukt folgt $\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle \leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$, und das ist die Behauptung. \square

Definition 2.5.5 Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ist. Endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen ein Orthogonalsystem, falls keiner von ihnen der Nullvektor ist, und falls gilt

$$\langle v_j, v_k \rangle = 0 \quad \text{für } j \neq k .$$

Falls zusätzlich gilt $\|v_j\| = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$, dann sprechen wir von einem Orthonormalsystem. Falls die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ zusätzlich noch eine Basis von V sind, sprechen wir von einer Orthogonalbasis bzw. einer Orthonormalbasis von V .

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, gibt es zu $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ genau einen Winkel $\varphi \in [0, \pi)$ mit

$$\cos \varphi = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} ,$$

und wir nennen dieses φ den Winkel zwischen v_1 und v_2 . Falls $V = \mathbb{R}^2$ oder $= \mathbb{R}^3$ ist, stimmt diese Definition mit der Anschauung überein!

Beispiel 2.5.6 In \mathbb{K}^n ist die kanonische Basis ein Orthonormalsystem.

Lemma 2.5.7 Ein Orthogonalsystem ist immer linear unabhängig.

Beweis: Seien v_1, \dots, v_n ein Orthogonalsystem. Aus $0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ folgt $0 = \langle v_j, \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle v_j, v_k \rangle = \lambda_j \|v_j\|^2$, und da $v_j \neq 0$ ist, folgt hieraus $\lambda_j = 0$. Da dies für jedes $j = 1, \dots, n$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Satz 2.5.8 (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Seien $w_1, \dots, w_n \in V$ linear unabhängig, und seien v_1, \dots, v_n durch folgende Rekursionsgleichungen definiert:

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1,$$

und für $0 \leq k \leq n-1$

$$\tilde{v}_{k+1} = w_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle v_j, w_{k+1} \rangle v_j, \quad v_{k+1} = \frac{1}{\|\tilde{v}_{k+1}\|} \tilde{v}_{k+1}.$$

Dann sind v_1, \dots, v_n ein Orthonormalsystem, und

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n).$$

Beweis: Wir zeigen per Induktion, dass die Vektoren v_1, \dots, v_k immer ein Orthonormalsystem sind, für alle $k = 1, \dots, n$. Die ist sicher richtig für $k = 1$, und wenn es für irgendein $k \geq 1$ stimmt, dann folgt für alle $\nu = 1, \dots, k$: $\langle v_\nu, v_{k+1} \rangle = \langle v_\nu, w_{k+1} \rangle - \sum_{j=1}^k \langle v_j, w_{k+1} \rangle \langle v_\nu, v_j \rangle = 0$, denn $\langle v_\nu, v_j \rangle = \delta_{\nu j}$. \square

Aufgabe 2.5.9 Orthogonalisiere die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das heißt genauer: Berechne die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 aus dem obigen Satz.

Satz 2.5.10 (Beste Approximation)

Seien v_1, \dots, v_n ein Orthogonalsystem in V , und sei $v \in X$. Dann gilt:

(a) Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ist $\|v - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\|$ genau dann minimal, wenn

$$\alpha_k = \frac{\langle v_k, v \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} = \frac{\langle v_k, v \rangle}{\|v_k\|^2} \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (2.5.1)$$

(b) Es gilt

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^n \frac{\langle v_k, v \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|\langle v_k, v \rangle|^2}{\|v_k\|^2}. \quad (2.5.2)$$

(Ohne Beweis)

Definition 2.5.11 Die Menge aller Linearkombinationen von v_1, \dots, v_n ist ein n -dimensionaler Unterraum U von V . Der Vektor

$$\tilde{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle v_k, v \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

ist der Vektor in diesem Unterraum, welcher von v den minimalen Abstand hat, und $v - \tilde{v}$ ist orthogonal zu U . Deshalb nennt man \tilde{v} auch die orthogonale Projektion von v auf den Unterraum U .

Aufgabe 2.5.12 Überprüfe, dass die Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)^T$, $v_2 = (0, 1, 0)^T$ ein Orthogonalsystem in \mathbb{R}^3 mit dem kanonischen Skalarprodukt bilden. Berechne die orthogonale Projektion von $v = (1, 1, 0)^T$ auf den von v_1, v_2 aufgespannten Unterraum.

2.6 Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

Definition 2.6.1 Zwei Matrizen A und B von gleicher Größe heißen äquivalent, falls es zwei invertierbare Matrizen C_1, C_2 von entsprechender Größe gibt mit $C_1 A = B C_2$.

Aufgabe 2.6.2 Zeige, dass der Begriff der Äquivalenz die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation auf der Menge aller Matrizen besitzt - für die Definition der Äquivalenzrelation, vergleiche das Manuskript des letzten Semesters.

Satz 2.6.3 Zwei Matrizen A und B von gleicher Größe sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang haben. Weiter ist jede Matrix A mit m Zeilen, n Spalten und Rang ν äquivalent zu der Matrix

$$N = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right],$$

wobei die Normalform N wieder m Zeilen und n Spalten hat, und die Anzahl der Zeilen mit einer 1 gerade gleich ν ist.

(Ohne Beweis)

Aufgabe 2.6.4 Finde heraus, ob folgende zwei Matrizen äquivalent sind:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 2.6.5 Zwei quadratische Matrizen A und B von gleicher Größe heißen ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix C von entsprechender Größe gibt mit $C A = B C$. Eine quadratische Matrix heißt diagonalisierbar, falls sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt ein Eigenwert einer quadratischen Matrix A , falls es einen Vektor $x \neq 0$ passender Größe gibt mit

$$A x = \lambda x. \tag{2.6.1}$$

Jeder vom Nullvektor verschiedene Vektor x , der (2.6.1) erfüllt, heißt ein zu λ gehöriger Eingevektor. Die Menge aller Lösungen, einschließlich des Nullvektors, der Eigenvektorgleichung (2.6.1) heißt auch der Eigenraum zu λ . Das Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{2.6.2}$$

heißt das charakteristische Polynom von A .

Aufgabe 2.6.6 Zeige, dass der Begriff der Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller quadratischen Matrizen ist.

Aufgabe 2.6.7 Finde das charakteristische Polynom der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Satz 2.6.8 Für jede quadratische n -reihige Matrix A gelten folgende Aussagen:

- (a) Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ ist ein Polynom n -ten Grades.
- (b) Genau dann ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , wenn $p_A(\lambda) = 0$ ist.
- (c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind immer linear unabhängig.
- (d) Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn es n linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn A n verschiedene Eigenwerte hat.

Beweis: Aussage (a) folgt aus der Definition von Determinanten. Zu (b): Die Eigenvektorgleichung (2.6.1) ist gleichbedeutend mit $(A - \lambda I)x = 0$. Dies ist ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von x . Falls $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \neq 0$ ist, existiert die inverse Matrix $(A - \lambda I)^{-1}$, und das Gleichungssystem hat nur die Lösung $x = (A - \lambda I)^{-1}0 = 0$, und deshalb kann ein solches λ kein Eigenwert sein. Umgekehrt, falls $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ ist, gibt es eine Lösung $x \neq 0$, und dann ist λ per Definition ein Eigenwert. Zu (c): Seien x_1, \dots, x_k Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, welche alle voneinander verschieden sind. Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit durch Induktion über k : Für $k = 1$ ist nicht zu zeigen, da jeder Vektor $x_1 \neq 0$ linear unabhängig ist. Für $k \geq 2$ dürfen wir als Induktionshypothese annehmen, dass x_1, \dots, x_{k-1} linear unabhängig sind. Falls dann x_1, \dots, x_k linear abhängig wären, könnte man x_k als eine Linearkombination der übrigen Vektoren schreiben, etwa $x_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j$. Daraus folgt aber

$$\lambda_k x_k = A x_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j A x_j = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \lambda_j x_j.$$

Weil die linke Seite der Gleichung aber gleich $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_k \alpha_j x_j$ ist, folgt

$$0 = \sum_{j=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_j) \alpha_j x_j.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der x_1, \dots, x_{k-1} folgt hieraus

$$0 = (\lambda_k - \lambda_j) \alpha_j \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$

Da $\lambda_k \neq \lambda_j$ für alle $j = 1, \dots, k-1$ ist, folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, was aber $x_k = 0$ bewirkt. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass ein Eigenvektor nie gleich dem Nullvektor ist. Zu (d): Wenn B eine Diagonalmatrix ist, dann folgt aus $AC = CB$, dass die Spalten von C Eigenvektoren zu A sind. Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Aufgabe 2.6.9 Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entscheide, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

Aufgabe 2.6.10 Sei A eine n -reihige quadratische Matrix, und sei $p_A(x)$ ihr charakteristisches Polynom. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , also die Nullstellen von $p_A(x)$, wobei mehrfache Nullstellen auch mehrfach aufgeschrieben seien, so dass die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht unbedingt alle verschieden sind. Sei weiter $\text{tr } A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$ die sogenannte Spur, auf Englisch "trace", von A . Zeige:

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k = \det A \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{tr } A.$$

2.7 Normalformen

Definition 2.7.1 Eine quadratische reelle Matrix A heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$ ist. Eine quadratische Matrix A heißt *hermitesch*, falls $\overline{A}^T = A$ ist. Eine quadratische Matrix U heißt *unitär*, falls $\overline{U}^T U = I$ ist, d. h., falls $U^{-1} = \overline{U}^T$ ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Spalten von U ein Orthonormalsystem bilden. Falls die Elemente einer unitären Matrix U alle reell sind, nennt man U auch *orthogonal*. Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ heißt *längentreu*, falls

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : \|T(x)\| = \|x\| .$$

Proposition 2.7.2 Sei U eine quadratische Matrix. Genau dann ist die lineare Abbildung $x \mapsto Ux$ längentreu, wenn U unitär ist.

(Ohne Beweis)

Lemma 2.7.3 Sei A eine hermitesche Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von A reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis: Aus $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$ folgt $\lambda(\overline{x}^T x) = \overline{x}^T(\lambda x) = \overline{x}^T(Ax) = \overline{(\overline{A}x)^T} x = \overline{(Ax)^T} x = \overline{\lambda}(\overline{x}^T x)$. Durch Kürzen von $\overline{x}^T x = \|x\|^2 \neq 0$ folgt daraus $\overline{\lambda} = \lambda$. Für Eigenvektoren x_j von A zu Eigenwerten λ_j folgt $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle - \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_2 \rangle - \langle x_1, Ax_2 \rangle = 0$. Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, folgt daraus die Orthogonalität von x_1 und x_2 . \square

Satz 2.7.4 (Satz von der Hauptachsentransformation)

Zu jeder symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix U so, dass $U^T A U$ eine Diagonalmatrix ist. Mit anderen Worten: Zu einer n -reihigen symmetrischen Matrix gibt es ein Orthonormalsystem von n Eigenvektoren.

(Ohne Beweis)

Aufgabe 2.7.5 Berechne das System von 3 orthonormalen Eigenvektoren zur Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Satz 2.7.6 (Simultane Hauptachsentransformation)

Seien A_1, \dots, A_m symmetrische Matrizen, welche miteinander kommutieren, d. h., für welche

$$A_j A_k = A_k A_j \quad \forall j, k = 1, \dots, m .$$

Dann gibt es eine orthogonale Matrix U so, dass die Matrizen $U^T A_k U$ alle diagonal sind.

(Ohne Beweis)

Definition 2.7.7 Eine quadratische Matrix der Form

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

d. h., eine quadratische Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind bis auf Einsen unterhalb der Diagonalen, heißt ein nilpotenter Jordanblock. Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt die Matrix $\lambda I + N$, mit N wie oben, ein Jordanblock. Für quadratische Matrizen A_1, \dots, A_ν von i. a. unterschiedlicher Größe heißt die Matrix

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_\nu \end{array} \right],$$

wobei das Symbol 0 jeweils für eine Nullmatrix passender Größe steht, die direkte Summe der Matrizen A_1, \dots, A_ν . Eine Matrix J heißt Jordanmatrix, wenn sie als direkte Summe von Jordanblöcken geschrieben werden kann.

Aufgabe 2.7.8 Sei N wie in obiger Definition. Finde alle Potenzen N^k , d. h., alle Produkte der Form $N \cdot \dots \cdot N$ mit k Faktoren, für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.7.9 Finde die direkte Summe der Matrizen A , B und C aus Aufgabe 2.6.9.

Satz 2.7.10 (Satz von der Jordanschen Normalform) Jede quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer Jordanmatrix.

(Ohne Beweis)

2.8 Definite Matrizen

Definition 2.8.1 Sei A eine n -reihige symmetrische Matrix. Die Funktion

$$q_A(x) = x^T A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

heißt die zu A gehörige quadratische Form.

Wir nennen die Matrix A positiv semidefinit, falls $q_A(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und positiv definit, falls sogar $q_A(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist. Entsprechend heißt A negativ semidefinit bzw. negativ definit, falls $-A$ positiv semidefinit bzw. positiv definit ist. Schließlich heißt A indefinit, falls es weder positiv noch negativ semidefinit ist, d. h., falls es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $q_A(x_1) < 0$ und $q_A(x_2) > 0$.

Aufgabe 2.8.2 Zeige: Die Einheitsmatrix ist positiv definit; eine Diagonalmatrix ist genau dann positiv definit bzw. semidefinit, wenn alle Diagonalelemente positiv bzw. nicht-negativ sind. Finde selbst die entsprechende Charakterisierung von negativ (semi)definiten und indefiniten Diagonalmatrizen.

Satz 2.8.3 Sei A eine symmetrische Matrix.

- Genau dann ist A positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.
- Genau dann ist A positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- Genau dann ist A negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht-positiv sind.
- Genau dann ist A negativ definit, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.
- Genau dann ist A indefinit, wenn ein Eigenwert von A positiv und ein anderer negativ ist.

(Ohne Beweis)

Definition 2.8.4 Für eine quadratische n -reihige Matrix $A = [a_{jk}]$ heißen die Zahlen

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

die Hauptunterdeterminanten von A . Die Zahl k heißt dabei auch die Ordnung der Hauptunterdeterminante.

Wenn wir zwei Zeilen von A und anschließend die zwei Spalten von A mit den gleichen Nummern vertauschen, sprechen wir auch von einer simultanen Vertauschung von zwei Zeilen und Spalten von A . Geht B aus A durch endlich viele simultane Vertauschungen von Zeilen und Spalten hervor, so heißen die Hauptunterdeterminanten von B auch allgemeine Hauptunterdeterminanten von A .

Satz 2.8.5 Sei A eine symmetrische Matrix.

- (a) Wenn alle Hauptunterdeterminanten von A positiv sind, dann ist A positiv definit.
- (b) Wenn A positiv definit ist, dann sind alle allgemeinen Hauptunterdeterminanten von A positiv.

(Ohne Beweis)

Bemerkung 2.8.6 Wenn man von A zu $-A$ übergeht, dann bleiben alle allgemeinen Hauptunterdeterminanten mit gerader Ordnung erhalten, während die mit ungerader Ordnung ihr Vorzeichen wechseln. Daher kann man aus obigem Satz leicht Kriterien für negative Definitheit ableiten.

Aufgabe 2.8.7 Untersuche die Matrizen aus Aufgabe 2.6.9 auf Definitheit.

Aufgabe 2.8.8 Zeige für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

folgende Aussagen:

- Genau dann ist A indefinit, wenn $ac < b^2$ ist.
- Genau dann ist A positiv definit, wenn $ac > b^2$ und $a > 0$ ist.
- Genau dann ist A negativ definit, wenn $ac > b^2$ und $a < 0$ ist.

Daraus folgt, dass A in allen anderen Fällen semidefinit ist.

Kapitel 3

Der Jordan-Inhalt

3.1 Definition des Inhalts

Definition 3.1.1 Seien $a = (a_1, \dots, a_n)^T, b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ so, dass $a_k \leq b_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ gilt. Dann heißt die Menge

$$I = [a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T : a_k \leq x_k \leq b_k \ \forall k = 1, \dots, n\}$$

ein n -dimensionales abgeschlossenes Intervall oder einfach ein Intervall. Wenn $\ell = b_k - a_k$ von k unabhängig ist, nennen wir I auch einen Würfel, und ℓ heißt seine Kantenlänge. Offenbar ist $I = I_1 \times \dots \times I_n$ für $I_k = [a_k, b_k]$. Analog kann man auch offene und halboffene Intervalle in \mathbb{R}^n definieren, wir wollen das aber hier nicht tun. Für ein solches Intervall I bezeichnen wir die Zahl

$$|I| = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

als n -dimensionalen Inhalt oder Volumen von I . Auch die leere Menge wollen wir als Intervall auffassen und ihr den Inhalt 0 zuordnen. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ heißt die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_k = \alpha$ eine achsenparallele Hyperebene. Wir sagen: Eine solche achsenparallele Hyperebene zerlegt ein beliebiges $M \subset \mathbb{R}^n$ in zwei Teilmengen

$$M_1 = \{x \in M : x_k \leq \alpha\}, \quad M_2 = \{x \in M : x_k \geq \alpha\},$$

welche im Allgemeinen nicht disjunkt sein werden, und von denen eine auch leer sein kann. Ist $M = I$ ein Intervall, so sind auch die beiden Teile Intervalle I_1, I_2 , und man prüft mit der Definition des Inhaltes nach, dass $|I| = |I_1| + |I_2|$ gilt. Zwei Intervalle I_1 und I_2 heißen fremd, wenn sie keine inneren Punkte gemeinsam haben. Eine Vereinigung von endlich vielen Intervallen heißt eine Intervallsumme. Jede solche Intervallsumme S ist auch Vereinigung von paarweise fremden Intervallen I_1, \dots, I_N , und in diesem Fall nennen wir I_1, \dots, I_N auch Zerlegung von S und definieren den Inhalt von S als

$$|S| = \sum_{k=1}^N |I_k|.$$

Eine Intervallsumme besitzt immer unendlich viele verschiedene Zerlegungen. Es ist nicht ganz leicht zu überprüfen, aber jedenfalls richtig, dass die Zahl $|S|$ hierbei nicht von der gewählten Zerlegung abhängt. Außerdem gilt: Sind S_1 und S_2 Intervallsummen mit $S_1 \subset S_2$, so ist $|S_1| \leq |S_2|$. Sei jetzt $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und nicht leer. Dann bezeichnen wir das Supremum der Inhalte aller Intervallsummen $S \subset M$ als den inneren Inhalt $|M|_i$ von M . Analog heißt das Infimum der Inhalte aller Intervallsummen $S \supset M$ der äußere Inhalt $|M|_a$ von M . Falls der äußere und der innere Inhalt gleich sind, heißt M Jordan-messbar, und $|M|_a = |M|_i$ heißt (Jordan-) Inhalt von M . Aus der Definition folgt sofort, dass jede Intervallsumme Jordan-messbar ist, und dass ihr Jordan-Inhalt gleich dem vorher definierten Inhalt ist.

Bemerkung 3.1.2 In den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ ist es üblich und anschaulich, statt vom Inhalt einer Menge M von deren Flächeninhalt bzw. Volumen zu sprechen. Aus der Definition ergeben sich folgende einfache Eigenschaften des Inhaltsbegriffes, deren Beweise wir hier auslassen:

- (a) Für jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist $0 \leq |M|_i \leq |M|_a < \infty$.
- (b) Für beschränkte Mengen $M_1 \subset M_2 \subset \mathbb{R}^n$ ist $|M_1|_i \leq |M_2|_i$, $|M_1|_a \leq |M_2|_a$, also im Falle der Jordan-Messbarkeit auch $|M_1| \leq |M_2|$; man spricht deshalb auch von der Monotonie des Inhaltes.
- (c) Für beschränkte Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$|M_1 \cup M_2|_a \leq |M_1|_a + |M_2|_a;$$

man nennt diese Tatsache auch die Subadditivität des äußeren Inhaltes.

- (d) Für beschränkte Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overset{\circ}{M}_1 \cap \overset{\circ}{M}_2 = \emptyset$ gilt

$$|M_1 \cup M_2|_i \geq |M_1|_i + |M_2|_i.$$

Aufgabe 3.1.3 Berechne den äußeren und inneren Inhalt der Menge

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T : x_k \in \mathbb{Q}, 0 \leq x_k \leq 1 \quad \forall k = 1, \dots, n\},$$

und zeige, dass sie nicht Jordan-messbar ist.

Aufgabe 3.1.4 Man nennt eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesguesche Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Intervalle I_k gibt, so dass gilt

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \varepsilon.$$

Zeige: Die Menge M aus der vorigen Aufgabe ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Aufgabe 3.1.5 Zeige: Die Vereinigung abzählbar vieler Lebesguescher Nullmengen ist wieder eine Lebesguesche Nullmenge.

Aufgabe 3.1.6 Finde ein Beispiel dafür, dass der innere Inhalt nicht subadditiv ist.

3.2 Charakterisierung der Messbarkeit

Definition 3.2.1 Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Jordan-) Nullmenge, falls $|M|_a = 0$ ist. Es folgt dann, dass auch $|M|_i = 0$ ist, und deshalb ist jede Nullmenge auch Jordan-messbar und $|M| = 0$.

Aufgabe 3.2.2 Zeige: Die Menge der Glieder einer beliebigen konvergenten Folge in \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge.

Satz 3.2.3 Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂M eine Nullmenge ist.

(Ohne Beweis)

Satz 3.2.4 (Eigenschaften des Inhalts)

Für Jordan-messbare $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

- (a) $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ und $M_1 \setminus M_2$ sind ebenfalls Jordan-messbar.
- (b) $|M_1 \cup M_2| \leq |M_1| + |M_2|$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn die Mengen keine inneren Punkte gemeinsam haben.
- (c) Falls $M_1 \subset M_2$ gilt, folgt $|M_2 \setminus M_1| = |M_2| - |M_1|$.
- (d) Ist $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ beschränkt, und ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf B , so ist der Graph von f eine Nullmenge.

(Ohne Beweis)

Beispiel 3.2.5 Definiere die Menge B durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x_1 \leq b_1, \\ a_2(x_1) &\leq x_2 \leq b_2(x_1), \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_n(x_1, \dots, x_{n-1}) &\leq x_n \leq b_n(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Dabei seien a_1, b_1 Konstante und die übrigen a_j, b_j stetige Funktionen in den angegebenen Variablen auf den Bereichen, welche durch die vorhergehenden Ungleichungen beschrieben werden. Weiter gelte noch $a_1 \leq b_1$, sowie für alle $j = 2, \dots, n$ und alle Werte der Variablen $a_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \leq b_j(x_1, \dots, x_{j-1})$. Randpunkte dieser Menge sind dann gerade diejenigen $x \in B$, für welche für mindestens eine der Koordinaten x_j ein Gleichheitszeichen gilt. Nach Teil (d) des vorangegangenen Satzes ist der Rand von B eine Nullmenge, und deshalb ist B Jordan-messbar.

Aufgabe 3.2.6 Zeige: Jede beschränkte Teilmenge einer achsenparallelen Hyperebene ist eine Nullmenge.

Aufgabe 3.2.7 Zeige: Jede offene Kugel in \mathbb{R}^n ist Jordan-messbar.

Aufgabe 3.2.8 Zeige: Ist M Jordan-messbar, so sind es auch \overline{M} und $\overset{\circ}{M}$, und alle drei haben denselben Inhalt. SchlieÙe daraus, dass auch jede Menge C mit $\overset{\circ}{M} \subset C \subset \overline{M}$ Jordan-messbar ist, und dass $|C| = |M|$ ist.

Aufgabe 3.2.9 Finde ein Beispiel dafür, dass die Vereinigung abzählbar vieler Jordan-Nullmengen nicht in jedem Fall eine Jordan-Nullmenge sein muss.

3.3 Berechnung von Inhalten

Bisher können wir nur wenige Inhalte wirklich berechnen. Dies wollen wir jetzt ändern. Dazu zeigen wir zunächst:

Proposition 3.3.1 (Produktregel für den Jordan-Inhalt)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, und seien $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbar. Dann ist $M_1 \times M_2$ ebenfalls Jordan-messbar, und es gilt

$$|M_1 \times M_2| = |M_1| |M_2|,$$

wobei das Symbol $|\cdot|$ jeweils für den Inhalt im entsprechenden Raum steht.

(Ohne Beweis)

Definition 3.3.2 Für $M \subset \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$M(t) = \{(x_2, \dots, x_n)^T : (t, x_2, \dots, x_n)^T \in M\} \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Im wesentlichen ist $M(t)$ also der Durchschnitt von M mit der achsenparallelen Hyperebene $x_1 = t$, allerdings projiziert nach \mathbb{R}^{n-1} . Falls M beschränkt ist, ist $M(t) = \emptyset$ für alle t außerhalb eines kompakten Intervalls, und jede der Mengen $M(t)$ ist beschränkt.

Wir wollen jetzt die Berechnung des Inhalts einer Menge in \mathbb{R}^n auf die von Mengen in \mathbb{R}^{n+1} , gefolgt von der Berechnung eines Integrales zurückführen:

Satz 3.3.3 (Satz von Fubini für Inhalte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $M(t) = \emptyset$ ist für alle $t \notin [\alpha, \beta]$. Dann sind $|M(t)|_i$ und $|M(t)|_a$ beide über $[\alpha, \beta]$ integrierbar, und es gilt

$$|M| = \int_{\alpha}^{\beta} |M(t)|_i dt = \int_{\alpha}^{\beta} |M(t)|_a dt.$$

(Ohne Beweis)

Bemerkung 3.3.4 In obigem Satz haben wir $M(t)$ als Schnitt von M mit der achsenparallelen Hyperebene $x_1 = t$ definiert. Es ist nicht schwer zu sehen, dass ein analoger Satz gilt, wenn man $M(t)$ mittels eines Schnittes mit der Hyperebene $x_j = t$, für irgend ein $j \in \{1, \dots, n\}$, definiert. Weiter sei betont, dass die Mengen $M(t)$ im Allgemeinen keine Jordan-messbaren Teilmengen von \mathbb{R}^{n-1} sein müssen.

Aufgabe 3.3.5 Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ beschrieben durch die Ungleichungen

$$a \leq x_1 \leq b, \quad f(x_1) \leq x_2 \leq g(x_1),$$

mit Konstanten $a \leq b$ und stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $f(x_1) \leq g(x_1)$ für alle $x_1 \in [a, b]$. Zeige die Jordan-messbarkeit von B und berechne seinen Inhalt. Benutze dies, um den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen.

Aufgabe 3.3.6 Verallgemeinere die vorausgegangene Aufgabe auf drei Dimensionen, und benutze dies, um den Inhalt, also hier das Volumen, einer Kugel in \mathbb{R}^3 zu berechnen.

Aufgabe 3.3.7 Berechne den Inhalt von Mengen B wie in Beispiel 3.2.5.

3.4 Bewegungsinvarianz des Inhalts

Satz 3.4.1 Sei A eine quadratische n -reihige reelle Matrix, und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und sei M_f das Bild von M unter der affinen Abbildung $f(x) = Ax + b$. Dann ist M_f ebenfalls Jordan-messbar, und es gilt

$$|M_f| = |\det A| |M|.$$

(Ohne Beweis)

Definition 3.4.2 Eine affine Abbildung $f(x) = Ax + b$, mit A, b wie im vorausgegangenen Satz, heißt eine Bewegung, falls $|\det A| = 1$ ist.

Aus dem obigen Satz folgt unmittelbar, dass eine Bewegung den Jordan-Inhalt von Mengen nicht verändert. Man spricht deshalb auch von der *Bewegungsinvarianz* des Jordan-Inhalts.

Aufgabe 3.4.3 Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ die Spalten einer n -reihigen Matrix quadratischen A , und sei

$$M = M(A) = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n : 0 \leq \lambda_j \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \}.$$

Skizziere $M(A)$ für $n = 2$ und $n = 3$.

Aufgabe 3.4.4 Berechne den Jordan-Inhalt von $M(A)$, für eine beliebige quadratische Matrix A .

Aufgabe 3.4.5 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Berechne den Jordan-Inhalt des Ellipsoids

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1 \}.$$

Kapitel 4

Das mehrdimensionale Integral

4.1 Die Definition

Im Folgenden sei immer $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und nicht leer, und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf B beschränkt.

Definition 4.1.1 Wir nennen $\mathcal{Z} = \{B_1, \dots, B_N\}$ Zerlegung von B , wenn alle B_k Jordan-messbar und paarweise fremd sind, und wenn $B = \cup_{k=1}^N B_k$ gilt. Als Feinheit von \mathcal{Z} bezeichnen wir das Maximum der Durchmesser der B_k . Eine Folge (\mathcal{Z}_n) von Zerlegungen von B heißt zulässig, wenn die Feinheit von \mathcal{Z}_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Eine Zerlegung $\mathcal{Z}_1 = \{B_1^{(1)}, \dots, B_N^{(1)}\}$ heißt feiner als, oder Verfeinerung von $\mathcal{Z}_2 = \{B_1^{(2)}, \dots, B_M^{(2)}\}$, falls es zu jedem $k = 1, \dots, N$ ein $j \in \{1, \dots, M\}$ gibt mit $B_k^{(1)} \subset B_j^{(2)}$. Wenn $\mathcal{Z}_1 = \{B_1^{(1)}, \dots, B_N^{(1)}\}$ und $\mathcal{Z}_2 = \{B_1^{(2)}, \dots, B_M^{(2)}\}$ beliebig gegeben sind, dann heißt die Zerlegung $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$, welche aus allen $B_k^{(1)} \cap B_j^{(2)}$, $1 \leq k \leq N$, $1 \leq j \leq M$, besteht, die gemeinsame Verfeinerung oder Überlagerung von \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 . Zu einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{B_1, \dots, B_N\}$ setzen wir $m_k = \inf\{f(x) : x \in B_k\}$, $M_k = \sup\{f(x) : x \in B_k\}$, und nennen $U(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^N m_k |B_k|$ bzw. $O(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^N M_k |B_k|$ die zu \mathcal{Z} gehörige Untersumme bzw. Obersumme von \mathcal{Z} . Für beliebige Zwischenpunkte $\xi_k \in B_k$ heißt $S(\mathcal{Z}, \xi) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) |B_k|$ auch die zu \mathcal{Z} und dem Zwischenpunktvektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ gehörige Riemannsumme von f . Offenbar gilt immer $U(\mathcal{Z}) \leq S(\mathcal{Z}, \xi) \leq O(\mathcal{Z})$.

Um Ober- und Unterintegral definieren zu können, zeigen wir:

Lemma 4.1.2 Für beliebige Zerlegungen \mathcal{Z}_j von B gilt stets $U(\mathcal{Z}_1) \leq O(\mathcal{Z}_2)$.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass bei Verfeinerung einer Zerlegung die zugehörigen Obersummen (Untersummen) nicht größer (nicht kleiner) werden können. Deshalb gilt für die Überlagerung $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$:

$$U(\mathcal{Z}_1) \leq U(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2) \leq O(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2) \leq O(\mathcal{Z}_2).$$

Darum gilt die Behauptung. □

Definition 4.1.3 Wir nennen

$$I_* = \int_B f(x) dx = \sup \{U(\mathcal{Z})\}, \quad I^* = \int_B f(x) dx = \inf \{O(\mathcal{Z})\},$$

wobei das Supremum bzw. Infimum jeweils über alle Zerlegungen von B gebildet wird, das Unter- bzw. Oberintegral von f über den Bereich B . Offenbar ist $I_* \leq I^*$, und wir nennen f über B integrierbar, wenn $I_* = I^*$ gilt. Der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral wird dann mit $\int_B f(x) dx$ bezeichnet und heißt das Bereichsintegral oder einfach das Integral von f über B .

Beispiel 4.1.4 Ist f konstant, also $f(x) \equiv c$, so ist f über B integrierbar, und $\int_B f(x) dx = c|B|$. Wenn $f(x) \geq 0$ ist für $x \in B$, dann ist das Ober- bzw. Unterintegral von f über B gleich dem äußeren bzw. inneren Inhalt der $(n+1)$ -dimensionalen Menge $M_{f,B} = \{(x, y)^T : x \in B, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Also existiert das Integral von f über B genau dann, wenn $M_{f,B}$ Jordan-messbar ist, und dann ist

$$\int_B f(x) dx = |M_{f,B}|.$$

Dies alles folgt unmittelbar aus der Definition des Bereichsintegrals.

Aufgabe 4.1.5 Gib für $|B| > 0$ ein Beispiel einer nicht über B integrierbaren Funktion f .

Aufgabe 4.1.6 (Integration von Ungleichungen) Zeige: Sind die Funktionen f und g über B integrierbar, und gilt $f(x) \leq g(x)$ für $x \in B$, so folgt $\int_B f(x) dx \leq \int_B g(x) dx$.

4.2 Eigenschaften des Bereichsintegrals

Wir geben jetzt einige Resultate an, deren Beweise entweder direkt aus der entsprechenden Definition folgen oder weitgehend analog zu denen im eindimensionalen Fall und deshalb hier ausgelassen sind:

Proposition 4.2.1

(a) **(Fundamentalabschätzung)** Für $m = \inf \{ f(x) : x \in B \}$, $M = \sup \{ f(x) : x \in B \}$ gilt

$$m|B| \leq \int_B f(x) dx \leq \int_B f(x) dx \leq M|B|.$$

Falls f über B integrierbar ist, gilt insbesondere

$$\left| \int_B f(x) dx \right| \leq |B| \sup \{ |f(x)| : x \in B \}.$$

(b) **(Linearität des Integrals)** Sind f und g über B integrierbar, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ über B integrierbar, und es gilt

$$\int_B (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_B f(x) dx + \beta \int_B g(x) dx.$$

Korollar zu Proposition 4.2.1 (Integrale über Nullmengen) Ist B eine Jordansche Nullmenge, so ist jede auf B beschränkte Funktion auch über B integrierbar, und es ist $\int_B f(x) dx = 0$.

Satz 4.2.2

(a) Für jede zulässige Zerlegungsfolge (\mathcal{Z}_n) konvergieren die Folgen $(U(\mathcal{Z}_n))$ und $(O(\mathcal{Z}_n))$, und es gilt

$$\int_B f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{Z}_n), \quad \int_B f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O(\mathcal{Z}_n).$$

(b) Die Funktion f ist genau dann integrierbar über B , wenn für jede zulässige Folge von Zerlegungen von B und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren die zugehörigen Riemannsummen einen Grenzwert haben. Ist dies so, dann ist dieser Grenzwert gleich $\int_B f(x) dx$, also unabhängig von der Wahl der Zerlegungsfolge und der Zwischenpunktvektoren.

Proposition 4.2.3 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

Die Funktion f ist genau dann über B integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathcal{Z} von B gibt mit $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \varepsilon$.

Mit diesem Kriterium können wir nun folgende wichtige Resultate beweisen:

Satz 4.2.4 (Additivität des Integrals)

Seien A_1, A_2 Jordan-messbar und fremd, und sei $B = A_1 \cup A_2$. Dann gilt

$$\int_B f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx,$$

$$\int_B f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx.$$

Insbesondere ist f über B integrierbar genau dann, wenn es sowohl über A_1 als auch über A_2 integrierbar ist, und dann gilt

$$\int_B f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx,$$

Beweis: Für zulässige Zerlegungsfolgen $\mathcal{Z}_{n,j}$ von A_j , für $1 \leq j \leq 2$, ist $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n,1} \cup \mathcal{Z}_{n,2}$ eine zulässige Zerlegungsfolge von B . Mit Satz 4.2.2i; $\frac{1}{2}$ folgen dann die ersten beiden Aussagen. Aus diesen ergibt sich dann direkt die Integrierbarkeit von f über B unter Annahme der Integrierbarkeit über A_1 und A_2 . Umgekehrt sei jetzt f über B integrierbar. Dann gibt es nach dem Riemannschen Integrierbarkeitskriterium eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{B_1, \dots, B_N\}$ von B mit $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \varepsilon$. Für $\mathcal{Z}_j = \{B_1 \cap A_j, \dots, B_N \cap A_j\}$ folgt dann $O(\mathcal{Z}_j) - U(\mathcal{Z}_j) \leq O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z})$, und hieraus folgt die Integrierbarkeit über A_j , für $1 \leq j \leq 2$. \square

Satz 4.2.5 Ist f auf B beschränkt, und gibt es eine Jordansche Nullmenge $N \subset B$, für welche f auf $B \setminus N$ stetig ist, so ist f über B integrierbar.

(Ohne Beweis)

Satz 4.2.6 Sind f und g über B integrierbar, so gilt dasselbe auch für $f \cdot g$.

(Ohne Beweis)

Lemma 4.2.7 Sei $f : B \rightarrow A$, mit $A \subset \mathbb{R}$, über B integrierbar, und gelte für $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitzbedingung auf A . Dann ist $g \circ f$ über B integrierbar.

(Ohne Beweis)

Proposition 4.2.8 (Dreiecksungleichung für Integrale) Ist f über B integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt

$$\left| \int_B f(x) dx \right| \leq \int_B |f(x)| dx.$$

Beweis: Für $g(x) = |x|$ folgt aus dem obigen Lemma die Integrierbarkeit von $|f|$, und die Ungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung für die Riemannsummen. \square

Aufgabe 4.2.9 Sei f über B integrierbar, sei $N \subset B$ eine Jordansche Nullmenge, und sei g auf B beschränkt und $g(x) = f(x)$ für $x \in B \setminus N$. Zeige, dass auch g über B integrierbar ist und dass $\int_B f(x) dx = \int_B g(x) dx$ ist.

Aufgabe 4.2.10 Sei f über B integrierbar. Zeige die Integrierbarkeit von f^+ und f^- , mit

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \forall x \in B.$$

4.3 Mittelwertsätze und gliedweise Integration

Definition 4.3.1 Sei f über B integrierbar, und sei $|B| > 0$. Die Zahl

$$\mu = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$$

heißt der Mittelwert von f über B .

Satz 4.3.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei f über B integrierbar, sei $|B| > 0$, und sei μ der Mittelwert von f über B . Dann ist

$$m = \inf\{f(x) : x \in B\} \leq \mu \leq \sup\{f(x) : X \in B\} = M.$$

Beweis: Es ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in B$, und durch Integration folgt die Behauptung. \square

Satz 4.3.3 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien g und $f g$ über B integrierbar, und sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in B$. Dann existiert ein $\tilde{\mu} \in [m, M]$, mit m, M wie im vorigen Satz, so dass

$$\int_B f(x) g(x) dx = \tilde{\mu} \int_B g(x) dx.$$

Beweis: Es gilt

$$m \int_B g(x) dx \leq \int_B f(x) g(x) dx \leq M \int_B g(x) dx,$$

und daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 4.3.4 (Gliederweise Integration) Gegeben seien $f_n, g_k : B \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

- (a) Sind alle f_n über B integrierbar, und ist die Funktionenfolge (f_n) auf B gleichmäßig konvergent, so ist auch die Grenzfunktion f über B integrierbar, und es gilt

$$\int_B f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) dx.$$

- (b) Sind alle g_k über B integrierbar, und ist die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf B gleichmäßig konvergent, so ist auch die Grenzfunktion f über B integrierbar, und es gilt

$$\int_B f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_B g_k(x) dx.$$

(Ohne Beweis)

Aufgabe 4.3.5 Gib eine Formulierung des Mittelwertsatzes, welche auch für $|B| = 0$ richtig bleibt.

Aufgabe 4.3.6 Diskutiere, unter welchen Voraussetzungen über B ein $x_0 \in B$ existiert, für das $\mu = f(x_0)$ ist.

4.4 Der Satz von Fubini

In diesem Abschnitt seien wieder $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und nicht leer, und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf B beschränkt. Weiter sei ein $j \in \{1, \dots, n\}$ fest gewählt.

Definition 4.4.1 Für ein $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$y = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)^T$$

und identifizieren x mit dem Paar (x_j, y) . Statt $f(x)$ schreiben wir dann auch $f(x_j, y)$. Weiter nennen wir die Menge

$$B(x_j) = \{y : x = (x_j, y) \in B\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

einen Schnitt von B . Offenbar ist ein Schnitt $B(x_j)$ für beliebiges $x_j \in \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^{n-1} , und es gibt ein Intervall $[\alpha, \beta]$ so, dass $B(x_j) = \emptyset$ ist für $x_j \notin [\alpha, \beta]$.

Wir nennen die Jordan-messbare Menge B einen zulässigen Bereich, wenn alle Schnitte $B(x_j)$ Jordan-messbare Teilmengen von \mathbb{R}^{n-1} sind.

Beispiel 4.4.2 Die in Beispiel 3.2.5 betrachtete Menge B ist ein zulässiger Bereich für den Fall $j = 1$, denn dann sind alle nicht-leeren Schnitte Jordan-messbare Teilmengen in \mathbb{R}^{n-1} , weil sie wieder durch die entsprechenden Ungleichungen, aber mit einem festen Wert für x_1 , beschrieben sind.

Satz 4.4.3 (Satz von Fubini) Sei B ein zulässiger Bereich in obigem Sinn, und sei f über B integrierbar. Seien ferner $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $B(x_j) = \emptyset$ für $x_j \notin [\alpha, \beta]$. Dann gilt

$$\int_B f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{B(x_j)} f(x_j, y) dy \right) dx_j = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{B(x_j)} f(x_j, y) dy \right) dx_j.$$

(Ohne Beweis)

Aufgabe 4.4.4 Berechne das Integral $\int_B f(x) dx$, wenn $B \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe und $f(x_1, x_2) = x_2 \sin x_1$ ist.

Aufgabe 4.4.5 Sei B wie in Beispiel 3.2.5, und sei f stetig und beschränkt auf B . Zeige:

$$\int_B f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \dots \left(\int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1.$$

Der rechtsstehende Ausdruck heißt auch ein n -fach iteriertes Integral.

4.5 Die Substitutionsregel

Satz 4.5.1 Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $g : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Sei weiter $B \subset O$ kompakt, $N \subset B$ eine Jordan-Nullmenge, und sei g auf $O \setminus N$ bijektiv, und $\det g'(q) > 0$ oder $\det g'(q) < 0$ für alle $q \in O \setminus N$. Dann ist $g(B)$ ebenfalls Jordan-messbar, und für jede auf $g(B)$ stetige Funktion f gilt

$$\int_{g(B)} f(x) dx = \int_B f(g(q)) |\det g'(q)| dq.$$

(Ohne Beweis)

Aufgabe 4.5.2 Zeige: Für $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $|K(x_0, r)| = r^n |K(0, 1)|$.

Aufgabe 4.5.3 Finde die Beziehung zwischen den Inhalten der Kugeln vom Radius $r = 1$ von Dimension n und $n + 1$.

Kapitel 5

Kurvenintegrale, Stammfunktionen

5.1 Kurven, Rektifizierbarkeit, Wege

Definition 5.1.1 Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$. Eine stetige Abbildung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$, heißt Parameterdarstellung einer Kurve in \mathbb{R}^n . Das Intervall I heißt auch das Parameterintervall der Darstellung. Der Punkt $x(a)$ heißt Anfangspunkt, der Punkt $x(b)$ heißt Endpunkt der Kurve, und wir sagen manchmal auch, dass die Kurve die Punkte $x(a)$ und $x(b)$ verbindet, oder sprechen von einer Kurve von $x(a)$ nach $x(b)$. Falls $x(a) = x(b)$ ist, sprechen wir von einer geschlossenen Kurve. Falls aus $t_1 \leq t_2$ und $x(t_1) = x(t_2)$ folgt, dass $t_1 = t_2$ oder $t_1 = a$ und $t_2 = b$ ist, dann heißt die Kurve doppelpunktfrei. Zwei Parameterdarstellungen $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine stetige, surjektive und streng monoton wachsende Funktion $\phi : I_1 \rightarrow I_2$ gibt, für welche $x_1 = x_2 \circ \phi$ gilt. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Parameterdarstellungen von Kurven, und jede Äquivalenzklasse heißt eine Kurve in \mathbb{R}^n . Ist $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellung einer Kurve γ , so heißt die Menge $\gamma^* = \{x(t) : a \leq t \leq b\}$ auch der Träger von γ . Beachte, dass äquivalente Parameterdarstellungen den gleichen Träger haben, so dass es berechtigt ist, vom Träger der Kurve zu sprechen. Kurven, deren Träger nur aus einem Punkt besteht, heißen auch Einpunktkurven.

Beispiel 5.1.2 Alle Strecken und Polygonzüge sind spezielle Kurven. Die Parameterdarstellung $x(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $0 \leq t \leq \pi$, beschreibt die obere Hälfte des Einheitskreises, also des Kreises um den Nullpunkt mit Radius $r = 1$, in \mathbb{R}^2 . Da $\phi(t) = -\cos t$ auf $[0, \pi]$ stetig und streng monoton wachsend ist, ist $\tilde{x}(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})^T$, $t \in [-1, 1]$, eine äquivalente Darstellung.

Aufgabe 5.1.3 Zeige: Zu jeder Parameterdarstellung einer Kurve gibt es eine äquivalente Darstellung mit Parameterintervall $[0, 1]$.

Definition 5.1.4 Sei $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellung einer Kurve γ . Für eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ von $[a, b]$ sei

$$\ell(x, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^N \|x(t_k) - x(t_{k-1})\|.$$

Falls das Supremum $\ell(\gamma) = \sup_{\mathcal{Z}} \ell(x, \mathcal{Z})$, genommen über alle Zerlegungen \mathcal{Z} von $[a, b]$, endlich ist, heißt die Kurve γ rektifizierbar oder von endlicher Länge. Wie die gewählte Bezeichnung schon andeutet, hängt zwar $\ell(x, \mathcal{Z})$ von der gewählten Parameterdarstellung ab, aber $\ell(\gamma)$ ist für äquivalente Parameterdarstellungen immer gleich und heißt die Länge der Kurve γ . Die Kurve γ heißt stetig differenzierbar, wenn sie eine Parameterdarstellung $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt, welche auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist. Gilt zusätzlich noch $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, so nennen wir γ auch glatte Kurve und x glatte Parameterdarstellung von γ .

Beispiel 5.1.5 Setzt man $t \sin(1/t) = 0$ für $t = 0$, so ist $x(t) = (t \sin(1/t), t)^T$, $t \in [0, 2/\pi]$, Parameterdarstellung einer Kurve in \mathbb{R}^2 . Die Punkte

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{1}{\pi(N - k + 1/2)}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

bilden eine Zerlegung \mathcal{Z} von $[0, 2/\pi]$, und wegen $\sin(1/t_k) = (-1)^{n-k}$ folgt

$$\ell(x, \mathcal{Z}) \geq \sum_{k=1}^N |t_k \sin(1/t_k) - t_{k-1} \sin(1/t_{k-1})| \geq \sum_{k=1}^N (t_k + t_{k-1}).$$

Die rechte Seite ist größer als $(2/\pi) \sum_{k=2}^N 1/k$, und dies geht gegen ∞ für $N \rightarrow \infty$. Daher ist diese Kurve nicht rektifizierbar.

Proposition 5.1.6 Eine stetig differenzierbare Kurve γ ist rektifizierbar. Genauer: Ist $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung von γ , so gilt

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|x'(t)\| dt. \quad (5.1.1)$$

(Ohne Beweis)

Definition 5.1.7 Seien γ_1 und γ_2 Kurven mit Parameterdarstellungen $x_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, und sei der Endpunkt $x_1(1)$ von γ_1 gleich dem Anfangspunkt $x_2(0)$ von γ_2 . Dann ist

$$x(t) = \begin{cases} x_1(2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ x_2(2t - 1) & (1/2 \leq t \leq 1), \end{cases}$$

Parameterdarstellung einer neuen Kurve, welche wir mit $\gamma_1 + \gamma_2$ bezeichnen und die Summe von γ_1 und γ_2 nennen wollen. Umgekehrt, ist γ eine Kurve mit Parameterdarstellung $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so sind für irgend ein $c \in (a, b)$ die Restriktionen von x auf die beiden Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ Parameterdarstellungen von Kurven γ_1 und γ_2 , und es gilt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Wir sagen dann auch: γ_1 und γ_2 bilden eine Zerlegung von γ . Eine Kurve γ heißt stückweise stetig differenzierbar oder kürzer ein Weg, wenn γ in endlich viele stetig differenzierbare Teilkurven zerlegt werden kann. Entsprechend definieren wir stückweise glatte Kurven. Es ist wichtig zu beachten, dass die Begriffe Kurven und Wege in der Literatur unterschiedlich definiert werden! Ist γ eine Kurve mit Parameterdarstellung $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir die Kurve mit der Parameterdarstellung $x(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$, mit $-\gamma$.

Bemerkung 5.1.8 Aus der Definition der Länge von Kurven folgt unmittelbar, dass $\ell(\gamma_1 + \gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$ ist, falls $\gamma_1 + \gamma_2$ definiert ist. Daher folgt, dass Wege immer endliche Länge haben, und dass die Gleichung (5.1.1) auch für Wege gilt, wenn man davon absieht, dass der Integrand an endlich vielen Punkten undefiniert sein kann.

Aufgabe 5.1.9 Zeige: Äquivalente Parameterdarstellungen haben den gleichen Träger, aber Parameterdarstellungen von Kurven mit gleichem Träger müssen nicht unbedingt äquivalent sein.

Aufgabe 5.1.10 Zeige: Einpunktkurven sind stetig differenzierbar, aber nicht glatt.

Aufgabe 5.1.11 Zeige: Eine glatte Kurve besitzt immer auch eine Parameterdarstellung, welche nicht an allen Stellen differenzierbar ist.

Aufgabe 5.1.12 Berechne die Länge des Kreisbogens γ_s , gegeben durch die Parameterdarstellung $x(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$, $0 \leq t \leq s$.

5.2 Kurvenintegrale von Vektorfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Kurve γ mit Träger $\gamma^* \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 5.2.1 Sei $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellung der Kurve γ . Für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ von $[a, b]$ und beliebigen Zwischenpunktvektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ heißt die Zahl

$$\sum_{k=1}^N f^T(x(\xi_k)) (x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

die zugehörige Riemannsumme. Wir sagen dann, dass das Kurvenintegral

$$I = \int_{\gamma} f^T(x) dx = \int_{\gamma} \left(\sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j \right)$$

existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_{\varepsilon}$ gibt, so dass für jede Verfeinerung \mathcal{Z} von $\mathcal{Z}_{\varepsilon}$ und jeden zu \mathcal{Z} gehörigen Zwischenpunktvektor ξ gilt

$$\left| I - \sum_{k=1}^N f^T(x(\xi_k)) (x(t_k) - x(t_{k-1})) \right| < \varepsilon.$$

Um das hier eingeführte Kurvenintegral von dem später folgenden Kurvenintegral einer skalarwertigen Funktion zu unterscheiden, sprechen wir auch vom Kurvenintegral einer Vektorfunktion.

Satz 5.2.2 (Existenz und Berechnung von Kurvenintegralen) Sei γ eine rektifizierbare Kurve, und sei f auf dem Träger γ^* stetig. Dann existiert das Kurvenintegral von f entlang γ . Falls γ sogar eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt, dann gilt

$$\int_{\gamma} f^T(x) dx = \int_a^b f^T(x(t)) x'(t) dt. \quad (5.2.1)$$

(Ohne Beweis)

Satz 5.2.3 (Rechenregeln) Für beliebige Kurven gelten folgende Aussagen, wobei in (a), (b) und (d) aus der Existenz des Kurvenintegrals/der Kurvenintegrale auf der rechten Seite die Existenz der linken Seite folgt, während in (c) die Existenz der Integrale rechts äquivalent zur Existenz des links stehenden Kurvenintegrals ist:

- (a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \int_{\gamma} \alpha f^T(x) dx = \alpha \int_{\gamma} f^T(x) dx.$
- (b) $\int_{\gamma} (f(x) + g(x))^T dx = \int_{\gamma} f^T(x) dx + \int_{\gamma} g^T(x) dx.$
- (c) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f^T(x) dx = \int_{\gamma_1} f^T(x) dx + \int_{\gamma_2} f^T(x) dx.$
- (d) $\int_{-\gamma} f^T(x) dx = - \int_{\gamma} f^T(x) dx.$
- (e) $|\int_{\gamma} f^T(x) dx| \leq \ell(\gamma) \sup\{\|f(x)\| : x \in \gamma^*\}.$

(Ohne Beweis)

Aufgabe 5.2.4 Berechne das Kurvenintegral folgender Vektorfunktionen entlang des positiv orientierten Einheitskreises, d. h., für die Kurve mit der Parameterdarstellung wie in Aufgabe 5.1.12, mit $s = 2\pi$:

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 x_2, x_1^2)^T, \quad f(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)^T.$$

Aufgabe 5.2.5 Sei γ ein doppelpunktfreier Weg. Definiere eine Vektorfunktion $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ so, dass das Kurvenintegral von f entlang γ gerade die Kurvenlänge $\ell(\gamma)$ ergibt.

Aufgabe 5.2.6 Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

- (a) $\int_{\gamma} (x_2, x_3, x_1) dx$, wobei γ durch die Parameterdarstellung $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$ gegeben sei.
- (b) $\int_{\gamma} (x_1 + x_2, x_1 - x_2) dx$, wobei γ die von links nach rechts orientierte Parabel $x_2 = x_1^2$ zwischen $(-1, 1)^T$ und $(1, 1)^T$ sei.
- (c) $\int_{\gamma} (0, x_1 x_2^2) dx$, wobei γ ein voller Umlauf, entgegen dem Uhrzeiger, der durch $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$ definierten Ellipse sei.
- (d) $\int_{\gamma} (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2) dx$, wobei γ das Dreieck von $(0, 0)^T$ über $(1, 0)^T$ nach $(0, 1)^T$ und wieder zu $(0, 0)^T$ sei.

5.3 Wegunabhängigkeit und Stammfunktionen

In diesem Abschnitt sei immer $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und $f = (f_1, \dots, f_n)^T : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir können uns f als ein Vektorfeld veranschaulichen: Jedem $x \in G$ ist ein Vektor $f(x)$ zugeordnet, der z. B. die (Anziehungs-) Kraft angibt, welche auf einen im Punkt x befindlichen Körper der Masse 1 einwirkt, oder die Geschwindigkeit, mit der sich ein im Punkt x befindliches Flüssigkeitsteilchen weiterbewegt. Im ersten Fall spricht man auch von einem Kraftfeld, im zweiten von einem Geschwindigkeitsfeld. Bei der Interpretation als Kraftfeld hat das Kurvenintegral physikalisch die Bedeutung der Arbeit, welche bei einer Verschiebung eines Körpers mit Masse 1 entlang der Kurve γ gewonnen wird.

Definition 5.3.1 Falls eine partiell differenzierbare Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, für welche $f^T(x) = \text{Grad } F(x)$ für alle $x \in G$ ist, dann nennen wir F eine Stammfunktion von f (auf G), und in diesem Fall heißt f auch ein Gradientenfeld oder ein konservatives Feld, und $-F$ heißt dann auch potenzielle Energie.

Falls f auf G stetig ist, und falls für jeden geschlossenen Weg γ mit Träger in G gilt

$$\int_{\gamma} f^T(x) dx = 0,$$

dann sagen wir: Das Kurvenintegral über f ist in G wegunabhängig.

Bemerkung 5.3.2 Wenn γ_1, γ_2 zwei Wege in G mit demselben Anfangs- und Endpunkt sind, ist $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ ein geschlossener Weg, und nach den Rechenregeln für Kurvenintegrale gilt

$$\int_{\gamma} f(x)^T dx = \int_{\gamma_1} f(x)^T dx - \int_{\gamma_2} f(x)^T dx.$$

Daraus liest man ab, dass die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals äquivalent ist dazu, dass das Kurvenintegral über einen beliebigen Weg in G nicht von dessen Verlauf, sondern höchstens von seinem Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Satz 5.3.3 Das Kurvenintegral über ein stetiges Vektorfeld $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann wegunabhängig, wenn es ein Gradientenfeld ist. Ist dies der Fall, und ist F eine Stammfunktion von f , so gilt für jeden in G gelegenen Weg γ mit Anfangs- bzw. Endpunkt x_0 bzw. x_1 , dass

$$\int_{\gamma} f^T(x) dx = F(x_1) - F(x_0). \quad (5.3.1)$$

Beweis: Sei das Kurvenintegral wegunabhängig. Für festes $x_0 \in G$ und einen Weg $\gamma(x)$ in G mit Anfangspunkt x_0 und irgend einem Endpunkt $x \in G$ hängt das Kurvenintegral über f nur von x ab, und wir setzen

$$F(x) = \int_{\gamma(x)} f(x)^T dx \quad \forall x \in G. \quad (5.3.2)$$

Beachte, dass G offen und zusammenhängend ist, und deshalb existiert für jedes $x \in G$ immer ein Polygon (also ein ganz spezieller Weg), das x_0 und x verbindet. Für genügend kleine $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $k \in \{1, \dots, n\}$ ist dann

$$\frac{F(x + h e_k) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_{\gamma(x,h)} (f(y) - f(x))^T dy,$$

wobei $\gamma(x, h)$ die Verbindungsstrecke von x nach $x + h e_k$ ist. Aus der Abschätzung in Satz 5.2.2 (e) und der Stetigkeit von f folgt, dass die rechte Seite dieser Gleichung für $h \rightarrow 0$ gegen 0 geht, und deshalb ist F nach x_k partiell differenzierbar, und $F_{x_k} = f$. Mit anderen Worten: f ist ein Gradientenfeld, und die oben definierte Funktion F ist eine Stammfunktion. Umgekehrt, sei F Stammfunktion zu f . Ein Weg γ in G mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 ist per Definition die Summe von endlich vielen stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, und somit gilt

$$\int_{\gamma} f^T(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} f^T(x) dx.$$

Wenn $x_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung von γ_j ist, dann folgt aus (5.2.1) und dem ersten Hauptsatz, dass

$$\int_{\gamma_j} f^T(x) dx = \int_0^1 f(x_j(t))^T x_j'(t) dt = F(x_j(1)) - F(x_j(0))$$

für alle $j = 1, \dots, N$. Da $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_N$ ist, muss $x_j(0) = x_{j-1}(1)$ sein, und $x_1(0) = x_0$ sowie $x_N(1) = x_1$. Deshalb folgt

$$\int_{\gamma} f^T(x) dx = \sum_{j=1}^N (F(x_j(1)) - F(x_j(0))) = F(x_1) - F(x_0).$$

Das impliziert (5.3.1) und insbesondere auch die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals über f in G . \square

Beispiel 5.3.4 Die Funktion $k(x) = -c \|x\|^{-3} x$, für $x \neq 0$ und geeignetes $c > 0$, beschreibt das Schwerfeld der Erde, oder genauer, das eines beliebigen Massepunktes im Nullpunkt. Es ist ein Gradientenfeld, denn die Funktion $U(x) = c \|x\|^{-1}$ ist Stammfunktion.

Aufgabe 5.3.5 Zeige dass das Vektorfeld $f(x_1, x_2) = (2x_1 e^{x_2}, x_1^2 e^{x_2})^T$ in ganz \mathbb{R}^2 eine Stammfunktion hat.

Aufgabe 5.3.6 Zeige, dass $f(x) = (x_1, x_1 x_2, x_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, kein Gradientenfeld ist.

5.4 Die Integrabilitätsbedingungen

In einer Dimension hat jede stetige Funktion auch eine Stammfunktion. Dies ist nicht so für $n \geq 2$:

Satz 5.4.1 (Die Integrabilitätsbedingungen)

Sei $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ein Gradientenfeld in G , und sei $n \geq 2$. Falls dann f in G stetig partiell differenzierbar ist, gilt für alle $x \in G$:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (j \neq k).$$

Beweis: Nach Voraussetzung hat f eine Stammfunktion F , und wegen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x), \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

folgt die Behauptung aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der Differenzierungsreihenfolge bei zweiten partiellen Ableitungen. \square

Beispiel 5.4.2 Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)^T.$$

Dann kann man leicht überprüfen, dass die Integrabilitätsbedingungen gelten. Für den Einheitskreis γ mit der Parameterdarstellung $x(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ist aber

$$\int_{\gamma} f(x)^T dx = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Also ist das Kurvenintegral über f in G nicht wegunabhängig, und deshalb kann f in G keine Stammfunktion haben. Dies zeigt, dass die Integrabilitätsbedingungen im Allgemeinen nicht hinreichend sind für die Existenz einer Stammfunktion.

Satz 5.4.3 Sei G sternförmig bezüglich eines Punktes $x_0 \in G$, und erfülle f die Integrabilitätsbedingungen in G . Dann ist f ein Gradientenfeld.

(Ohne Beweis)

Bemerkung 5.4.4 Der obige Satz gilt allgemeiner auch in sogenannten einfach zusammenhängenden Gebieten; darauf wird hier nicht näher eingegangen.

Aufgabe 5.4.5 Überprüfe die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld in obigem Beispiel.

Aufgabe 5.4.6

- (a) Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfülle die Integrabilitätsbedingungen. Außerdem sei das Kurvenintegral von f längs eines festen Kreises um den Ursprung gleich Null. Beweise, dass f eine Stammfunktion besitzt.
- (b) Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfülle die Integrabilitätsbedingungen. Beweise, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\left(f_1(x_1, x_2) - c \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, f_2(x_1, x_2) + c \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)^T$$

eine Stammfunktion besitzt.

5.5 Kurvenintegrale von skalaren Funktionen

Definition 5.5.1 Sei $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellung einer rektifizierbaren Kurve γ der Länge $\ell(\gamma)$. Für $t \in [a, b]$ ist die Restriktion von x auf das Intervall $[a, t]$ wieder Parameterdarstellung einer Kurve γ_t , deren Länge höchstens gleich ℓ ist. Wir nennen die Funktion $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell]$, $t \mapsto s(t) = \ell(\gamma_t)$, die Bogenlänge der Kurve γ . Falls x stückweise stetig differenzierbar ist, dann ist

$$s(t) = \int_a^t \|x'(u)\| du, \quad \forall t \in [a, b],$$

und dann folgt $s'(t) = \|x'(t)\|$ außer an endlich vielen Stellen $t \in [a, b]$.

Sei $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(x(t)) ds(t)$$

existiert, heißt es das Kurvenintegral der skalaren Funktion f . Für stückweise stetig differenzierbares x ist also

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(x(t)) s'(t) dt = \int_a^b f(x(t)) \|x'(t)\| dt.$$

Eine Interpretation dieses Kurvenintegrals ist wie folgt: Wenn wir uns die Kurve γ als ein sehr dünnes Drahtstück denken, und wenn $f(x)$ das Gewicht des Drahts pro Längeneinheit an der Stelle x bedeutet, dann ist das Kurvenintegral gerade das Gesamtgewicht des Drahtes.

Kapitel 6

Vektoranalysis und Integralsätze

6.1 Krummlinige Koordinaten

Im Folgenden seien O_1, O_2 offene Mengen in \mathbb{R}^3 , und

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x_1, x_2, x_3) \\ q_2(x_1, x_2, x_3) \\ q_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

sei eine bijektive Abbildung von O_1 auf O_2 . Für die Umkehrabbildung schreiben wir dann $x(q) = (x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3))^T$. Wir setzen weiter voraus, dass alle später vorkommenden partiellen Ableitungen dieser Funktionen existieren und stetig sein sollen. Wir interpretieren die Werte von $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$ als *krummlinige Koordinaten* des Punktes $x \in \mathbb{R}^3$. Manchmal betrachten wir in Beispielen auch offene Teilmengen $O_1, O_2 \in \mathbb{R}^2$ und eine entsprechende bijektive Abbildung $q(x) = (q_1(x_1, x_2), q_2(x_1, x_2))^T$. Alle nachfolgenden Begriffe und Gleichungen sind dann entsprechend zu modifizieren.

Definition 6.1.1 Wir setzen für $j, k, \ell = 1, 2, 3$

$$\varepsilon_{q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} x, \quad \varepsilon_{q_j q_k} = \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} x = \varepsilon_{q_k q_j}, \quad g_k = \|\varepsilon_{q_k}\|,$$

und, unter der zusätzlichen Annahme von $g_k \neq 0$,

$$e_{q_k} = \frac{1}{g_k} \varepsilon_{q_k}, \quad \Gamma_{jk}^\ell = \frac{1}{g_\ell} \langle \varepsilon_{q_j q_k}, \varepsilon_{q_\ell} \rangle.$$

Die Zahlen Γ_{jk}^ℓ heißen auch Christoffel-Symbole.

Hält man z. B. die Werte von q_2 und q_3 fest, so beschreibt x als Funktion von q_1 eine Kurve in \mathbb{R}^3 , und ε_{q_1} ist ein Tangentenvektor an die Kurve. Der Vektor e_{q_1} ist dann ein entsprechender Einheitsvektor. Entsprechendes gilt für alle drei Vektoren ε_{q_j} bzw. e_{q_j} .

Definition 6.1.2 Ein System von krummlinigen Koordinaten heißt orthogonal, wenn die drei Vektoren e_1, e_2, e_3 immer ein Orthonormalsystem bilden.

Aufgabe 6.1.3 Zeige für orthogonale krummlinige Koordinaten die Gleichung

$$\varepsilon_{q_j q_k} = \sum_{\ell=1}^3 \Gamma_{jk}^\ell \varepsilon_{q_\ell}, \quad 1 \leq j, k \leq 3.$$

Proposition 6.1.4 Für orthogonale krummlinige Koordinaten gilt immer

$$g_\ell^2 \Gamma_{jk}^\ell = -g_k^2 \Gamma_{j\ell}^k, \quad 1 \leq j, k, \ell \leq 3.$$

Beweis: Bei orthogonalen Koordinaten gilt immer $0 = \langle \varepsilon_{q_k}, \varepsilon_{q_\ell} \rangle$. Durch Ableiten nach q_j folgt hieraus

$$0 = \langle \varepsilon_{q_k q_j}, \varepsilon_{q_\ell} \rangle + \langle \varepsilon_{q_k}, \varepsilon_{q_\ell q_j} \rangle.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 6.1.5 (Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2) Wir schreiben $q_1 = r$, $q_2 = \phi$ und definieren $x(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$. Diese Abbildung ist bijektiv von $O_2 = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ nach $O_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1 \leq 0\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad g_1 = 1, \quad \varepsilon_\phi = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}, \quad g_2 = r, \\ e_r &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_{rr} &= 0, \quad \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\phi r} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} -r \cos \phi \\ -r \sin \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel 6.1.6 (Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^3) Wir schreiben jetzt $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$, und $x(r, \theta, \phi) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)^T$. Es folgt

$$\varepsilon_r = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_\theta = \begin{bmatrix} r \cos \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_\phi = \begin{bmatrix} -r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren sind orthogonal, also sind Kugelkoordinaten orthogonale Koordinaten in \mathbb{R}^3 .

Es gibt viele weitere krummlinige Koordinatensysteme, die in manchen Anwendungen wichtig sind; siehe hierzu auch Formelsammlungen wie z. B. [1].

Definition 6.1.7 Gegeben seien krummlinige Koordinaten $q = (q_1, q_2, q_3)^T$. Eine stetige Funktion $q(t)$, $a \leq t \leq b$, heißt Parameterdarstellung einer Kurve in den krummlinigen Koordinaten. Die eigentliche Kurve in \mathbb{R}^3 hat dann natürlich die Parameterdarstellung $x(q(t))$.

Falls die Parameterdarstellung der Kurve entsprechend oft differenzierbar ist, haben die Ableitungen

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(q(t)), \quad b(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(q(t))$$

die Bedeutung von Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung der Bewegung eines Punktes, der sich zur Zeit t im Punkt $x(q(t))$ aufhält. Es ist üblich, Ableitungen nach der Zeit durch einen Punkt statt mit einem Strich zu kennzeichnen, und deshalb schreiben wir hier \dot{x} und \ddot{x} für die erste und zweite Ableitung von x nach der Zeit t .

Behauptung 6.1.8 In orthogonalen krummlinigen Koordinaten gelten folgende Darstellungen

$$v = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \varepsilon_{q_j}, \quad b = \sum_{\ell=1}^3 \left[\ddot{q}_\ell + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^\ell \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \varepsilon_{q_\ell}.$$

für Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Beweis: Wende die Kettenregel und Aufgabe 6.1.3 an! □

Definition 6.1.9 Gegeben seien krummlinige Koordinaten $q = (q_1, q_2, q_3)^T$. Eine Funktion $u(x)$, definiert auf O_1 , kann in der Form $u(x(q))$ auch als Funktion der Variablen q aufgefasst werden. Ihr Definitionsbereich ist dann natürlich gleich O_2 , d. h. streng genommen haben wir dann eine andere Funktion. Für die folgenden Überlegungen ist es aber praktisch, für diese neue Funktion einfach wieder u zu schreiben.

Für eine skalare Funktion u , welche entsprechend oft partiell differenzierbar ist, betrachten wir im Folgenden die Ausdrücke

$$\text{Grad } u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}), \quad \Delta u = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Der linke Ausdruck ist natürlich der wohlbekanntere Gradient von u , während der zweite Ausdruck als Laplaceoperator, angewandt auf die Funktion u , bezeichnet wird. Für eine vektorwertige Funktion $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ mit entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften setzen wir noch

$$\text{div } v = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \quad \text{rot } v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Hier nennt man den ersten Ausdruck auch die Divergenz, den zweiten die Rotation von v . Allgemein fasst man Ausdrücke, die Ableitungen einer Funktion enthalten, auch oft als das Ergebnis der Anwendung eines Differentialoperators auf diese Funktion auf.

Für krummlinige Koordinaten besteht oft die Aufgabe darin, die oben eingeführten Ausdrücke so umzuschreiben, dass statt der Ableitungen nach den ursprünglichen Variablen x_j die partiellen Ableitungen nach den neuen Veränderlichen q_k auftreten. Bei orthogonalen Koordinaten gelten dabei die Gleichungen

$$\text{Grad } u = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{g_j} \frac{\partial u}{\partial q_j} e_{q_j}^T, \quad \Delta u = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{g_1 g_2 g_3}{g_k} \frac{\partial u}{\partial q_k} \right).$$

Für die Umrechnung von Divergenz und Rotation wird auf die Literatur verwiesen.

Verwendet man die Abbildung $x = x(q)$ zur Substitution eines Bereichsintegrals wie in Abschnitt 4.5, so gilt

$$|\det x'(q)| = g_1 g_2 g_3.$$

Man sagt deshalb auch, dass das Volumenelement in krummlinigen Koordinaten gegeben ist als

$$dx_1 dx_2 dx_3 = g_1 g_2 g_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Dies ist aber mehr als Merksregel zu verstehen!

Aufgabe 6.1.10 Berechne Divergenz, Rotation, Laplaceoperator und Volumenelement in Polar- und Kugelkoordinaten.

Aufgabe 6.1.11 Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, und seien $g, h : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder, sowie $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare skalare Funktion. Zeige:

1. $\text{div } (fg) = \langle \text{Grad } f, g \rangle + f \cdot \text{div } g$.
2. $\text{rot } (fg) = f \cdot \text{rot } g + \text{Grad } f \times g$.
3. $\text{div } (g \times h) = \langle h, \text{rot } g \rangle - \langle g, \text{rot } h \rangle$.
4. Ist f sogar zweimal stetig differenzierbar, so gilt $\text{rot } (\text{Grad } f) = 0$.

6.2 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Im Folgenden werden Punkte aus \mathbb{R}^2 immer mit $(x, y)^T$ bezeichnet.

Definition 6.2.1 Ein $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein Normalbereich bezüglich y , wenn es ein Intervall $[a, b]$ sowie zwei auf $[a, b]$ stetige Funktionen α, β gibt, sodass

$$\alpha(x) < \beta(x) \quad \forall x \in (a, b),$$

$$B = \{(x, y)^T : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \quad a \leq x \leq b\}.$$

Sinngemäß wird ein Normalbereich bezüglich x definiert.

Ein solcher Normalbereich B bezüglich y ist immer messbar. Als Randkurve von B bezeichnet man die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_3 + \gamma_2$ mit den vier Teilkurven

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ \alpha(t) \end{pmatrix}, & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2 : \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}, & \alpha(b) \leq t \leq \beta(b), \\ \gamma_3 : \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -t \\ \beta(-t) \end{pmatrix}, & -b \leq t \leq -a, \\ \gamma_4 : \begin{pmatrix} x_4(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ -t \end{pmatrix}, & -\beta(a) \leq t \leq -\alpha(a). \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Orientierung der Randkurve γ so gewählt, dass der Bereich B beim Durchlaufen immer links liegt. Man spricht dann auch von einer positiv orientierten Randkurve.

Sei B Normalbereich bezüglich y mit stückweise glatter Randkurve, und sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass die partielle Ableitung f_y auf B existiert und f sowie f_y auf B stetig sind. Wir setzen $\int_\gamma f(x, y) dx$ gleich dem Kurvenintegral des Vektorfeldes $(f(x, y), 0)^T$ über die Randkurve γ . Es folgt dann durch Betrachtung der vier Teile des Randes γ , dass

$$-\int_\gamma f(x, y) dx = \int_a^b (f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x))) dx = \int_B f_y(x, y) d(x, y).$$

Wenn B auch Normalbereich bezüglich x ist, und wenn f_x existiert und auf B stetig ist, so folgt analog

$$\int_\gamma f(x, y) dy = \int_B f_x(x, y) d(x, y).$$

Daher gilt der folgende Satz:

Satz 6.2.2 (Gaußscher Integralsatz in der Ebene) Sei B ein Normalbereich bezüglich x und y , und sei die Randkurve γ von B positiv orientiert und stückweise glatt. Sei ferner G ein Gebiet welches B umfasst, und seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass f_x und g_y existieren, und dass f, g, f_x, g_y auf G stetig sind. Dann gilt

$$\int_B (f_x(x, y) - g_y(x, y)) d(x, y) = \int_\gamma (f(x, y) dy + g(x, y) dx).$$

Beispiel 6.2.3 Setzt man $f(x, y) = x/2$, $g(x, y) = -y/2$, so folgt aus dem obigen Satz

$$|B| = \frac{1}{2} \int_\gamma (x dy - y dx).$$

Also kann man den Flächeninhalt von B durch ein Kurvenintegral berechnen. Ist B etwa die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $r > 0$, also $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, so folgt

$$|B| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x(t) y'(t) - y(t) x'(t) \right) dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) dt,$$

also $|B| = r^2 \pi$.

Aufgabe 6.2.4 Berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene:

(a) $\int_M (2x_1 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2) dx$ für $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

(b) $\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\} \right|$ für $a, b > 0$.

(c) $\int_{\partial[0,1]^2} (2x_2, 6x_1) dx$.

6.3 Vektorprodukt und Flächen im Raum

Definition 6.3.1 Für $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ sei das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt oder äußere Produkt definiert als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Sind e_1, e_2, e_3 die drei kanonischen Basisvektoren in \mathbb{R}^3 , so gilt die Merkmregel

$$a \times b = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Beachte aber, dass rechts genau genommen keine Determinante steht, da die erste Zeile der Matrix Vektoren enthält.

Man beweist leicht folgende Rechenregeln für das Vektorprodukt:

- $a \times b = -b \times a$.
- $a \times a = 0$.
- $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda (a \times b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
- $a^T (b \times c) = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$.

Aus der letzten Regel folgt, dass $a \times b$ zu a und b orthogonal ist. Weiter gilt folgende Produktregel für die Differenziation eines Vektorproduktes:

Sind $a(t), b(t)$ glatte Parameterdarstellungen von Kurven in \mathbb{R}^3 , so ist

$$\frac{d}{dt} (a(t) \times b(t)) = \frac{da(t)}{dt} \times b(t) + a(t) \times \frac{db(t)}{dt}.$$

Hier muss aber unbedingt auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden.

Definition 6.3.2 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein zweidimensionales Gebiet, und sei $x : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig auf G . Für eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge $K \subset G$ von G heißt die Restriktion von x auf K Parameterdarstellung einer Fläche F in \mathbb{R}^3 . Wir wollen meistens $x(s, t)$ für einen Punkt der Fläche schreiben. Ist x in G nach beiden Variablen partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$n(s, t) = \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \quad (s, t)^T \in K$$

der Normalenvektor der Fläche im Punkt $x(s, t)$. Falls x auf G stetig partiell differenzierbar und der Normalenvektor nie der Nullvektor ist, heißt die Fläche glatt. Die Zahl $\|n(s, t)\|$ gibt dann ungefähr an, um wieviel größer ein kleines Stück der Fläche um den Punkt $x(s, t)$ herum im Vergleich zu einem entsprechenden Stück von B um den Punkt $(s, t)^T$ herum ist.

Ist f eine auf dem Träger der Fläche F definierte Funktion mit Werten in \mathbb{R} , so definieren wir das Integral von f über die Fläche F durch

$$\int_F f(x) d\sigma = \int_K f(x(s, t)) \|n(s, t)\| d(s, t).$$

Wenn $f(x) \equiv 1$ ist, dann ist das Flächenintegral gerade gleich dem Flächeninhalt von F . Allgemeiner kann man $f(x)$ als die Dichte einer auf F verteilten Masse ansehen, und in diesem Fall ist das Integral gleich der Gesamtmasse.

Aufgabe 6.3.3 Finde eine Parameterdarstellung der folgenden Flächen in \mathbb{R}^3 und berechne ihren Flächeninhalt:

1. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r > 0$.
2. $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0, x_3 = x_1 x_2\}$;
3. $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 = 2a x_3, x_1, x_2 \geq 0, (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \leq a^2 x_1\}$ mit einem $a > 0$.

6.4 Der Stokessche Integralsatz

Definition 6.4.1 Ist F eine Fläche in \mathbb{R}^3 mit einer Parameterdarstellung $x : K \rightarrow \mathbb{R}^3$, und ist der Rand von K eine Kurve γ_K mit Parameterdarstellung $(s(\tau), t(\tau))^T$, $a \leq \tau \leq b$, so heißt die Kurve γ_F mit Parameterdarstellung $x(s(\tau), t(\tau))$, $a \leq \tau \leq b$, die Randkurve von F . Wir nennen γ_F genau dann positiv orientiert, wenn γ_K positiv orientiert ist.

Ist $n(s, t)$ der Normalenvektor auf einer glatten Fläche F , so sei $\nu(s, t) = \|n(s, t)\|^{-1} n(s, t)$ der zugehörige normierte Normalenvektor.

Satz 6.4.2 (Stokesscher Integralsatz) Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt, unter genügend starken Voraussetzungen an die Fläche F und das Vektorfeld f , die Gleichung

$$\int_F \nu^T \operatorname{rot} f d\sigma = \int_{\gamma_F} f^T(x) dx.$$

6.5 Der Gaußsche Integralsatz

Definition 6.5.1 Eine Fläche mit Parameterdarstellung $x : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt doppelpunktfrei, falls K ein Normalbereich ist und die Parameterdarstellung x im Inneren von K injektiv ist. Wir sagen, dass ein

Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ einen glatten Rand hat, wenn wir den Rand ∂B als eine glatte doppelpunktfreie Fläche schreiben können. Wir nennen den Rand positiv orientiert, falls der normierte Normalenvektor ν immer ins äußere von B zeigt.

Satz 6.5.2 (Gaußscher Integralsatz in \mathbb{R}^3) Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt, unter genügend starken Voraussetzungen an den Bereich B und das Vektorfeld f , die Gleichung

$$\int_B \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial B} f^T(x) \nu d\sigma,$$

wobei der Rand ∂B positiv orientiert sei.

Aufgabe 6.5.3 Es sei S die Oberfläche der Kugel mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt. Berechne $\int_S (x_1^3, x_2^3, x_3^3) \nu d\sigma$ mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Literaturverzeichnis

- [1] **I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, und H. Mühlig**, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.
- [2] **K. Meyberg und P. Vachenaue**r, *Höhere Mathematik 1*, Springer, Berlin, 1999.
- [3] ———, *Höhere Mathematik 2*, Springer, Berlin, 1999.

Index

- Abbildung
 - lineare, 17
- Abstand, 20
- Addition
 - von Matrizen, 4
- Ähnlichkeit von Matrizen, 22
- Anfangspunkt
 - einer Kurve, 38
- Äquivalenz von Matrizen, 22
- äquivalente Parameterdarst., 38

- Basis, 16
 - kanonische, 16
- Bereichsintegral, 33
- beste Approximation, 21

- \mathbb{C}^n , 10
- charakteristisches Polynom, 22
- Christoffel-Symbole, 45

- Definitheit, 25
- Determinanten, 6
 - multiplikationssatz, 12
 - Rechenregeln, 8
- Diagonalelemente, 7
- diagonalisierbar, 22
- Diagonalmatrix, 7
- Differentialoperator, 47
- Dimension, 16
- direkte Summe, 25
- Divergenz, 47
- doppelpunktfrei, 38
- Dreiecksmatrix, 7
- Dreiecksungleichung, 20
 - für Integrale, 35

- Eigenraum, 22
- Eigenvektor, 22
- Eigenwert, 22
- Einheitsmatrix, 7
- Einpunktkurven, 38
- elementare Zeilenoperationen, 10
- Endpunkt
 - einer Kurve, 38
- Entwicklungssatz, 12
- erweiterte Matrix, 10
- Erzeugendensystem, 15

- euklidischer Vektorraum, 19

- Fehlstand, 5
- Feinheit einer Zerlegung, 32
- Fläche
 - glatte, 50
 - Parameterdarstellung, 50
 - positiv orientierte, 50
 - Rand einer, 50
- Flächeninhalt
 - Berechnung
 - als Kurvenintegral, 49
- Flächeninhalt, 28
- fremde Intervalle, 27
- Fundamentalabschätzung, 33

- Gaußsches Eliminationsverf., 8
- geschlossene Kurve, 38
- glatte Kurve, 38
- Gleichungssystem
 - lineares, 10
 - homogenes, 10
- gliedweise Integration, 36
- Gradientenfeld, 41
- Gruppe
 - symmetrische, 5

- Hauptunterdeterm., 26
- hermitesche Matrix, 24
- Hilbertraum
 - Prä-, 19
- Hyperebene, 27

- Inhalt, 27
 - äußerer/innerer, 27
 - Monotonie, 28
 - von kartesischen Produkten, 29
- Inhomogenitätenvektor, 10
- inneres Produkt, 19
- Integral, 33
 - Unter-/Ober-, 33
- Integralsatz
 - Gaußscher, 51
 - in der Ebene, 48
 - Stokesscher, 50
- Intervall in \mathbb{R}^n , 27
- Intervallsumme, 27

- Inversion, 5
- Jordan-messbar, 27
- Jordan-Nullmenge, 28
- Jordanblock, 25
 - nilpotenter, 25
- Jordanmatrix, 25
- kanonische Basis, 16
- Kantenlänge, 27
- Kern, 17
- Koeffizientenmatrix, 10
- konservativ, 41
- Kronecker-Delta, 7
- krummlinige Koordinaten, 45
 - orthogonale, 45
- Kurven, 38
 - Anfangs- und Endpunkt, 38
 - doppelpunktfreie, 38
 - geschlossene, 38
 - glatte, 38
 - Parameterdarstellung, 38
 - rektifizierbare, 38
 - stückweise glatte, 39
 - stetig differenzierbare, 38
 - Summe von, 39
- Kurvenintegral
 - einer Vektorfunktion, 40
 - Wegunabhängigkeit, 41
- Länge einer Kurve, 38
- Lebesguesche Nullmenge, 28
- lineare Abbildung, 17
- lineare Hülle, 15
- lineare Unabhängigkeit, 15
 - von unendl. vielen Vekt., 16
- linearer Raum, 14
- Linearkombination, 15
- Matrix, 4
 - addition, 4
 - multiplikation, 9
 - erweiterte, 10
 - Determinante einer, 6
 - Diagonal-, 7
 - Dreiecks-, 7
 - hermitesche, 24
 - Jordan-, 25
 - orthogonale, 24
 - quadratische, 4
 - (semi)definite, 25
 - Spur einer, 23
 - symmetrische, 24
 - transponierte, 7
 - Typ einer, 4
 - unitäre, 24
- Minor, 12
- Mittelwert
 - einer Funktion, 35
- Mittelwertsatz
 - der Integralrechnung, 35
 - erweiterter, 35
- Monotonie des Inhalts, 28
- Multiplikation
 - von Matrizen, 9
- nilpotent, 25
- Norm, 20
- Normalbereich, 48
- Normalenvektor, 50
 - normierter, 50
- Nullmatrix, 4
- Nullmenge, 28
 - Lebesguesche, 28
- Ober
 - integral, 33
 - summe, 32
- Orthogonal
 - basis, 20
 - system, 20
- orthogonal, 20
- orthogonale Matrix, 24
- Orthogonale Projektion, 21
- Orthonormal
 - basis, 20
 - system, 20
- Parameterdarstellung
 - einer Kurve, 38
- Permutation, 5
 - identische, 5
- Polynom
 - charakteristisches, 22
- potenzielle Energie, 41
- Prä-Hilbertraum, 19
- Produkt
 - von Matrizen, 9
 - von Permutationen, 5
- Projektion
 - orthogonale, 21
- quadratische Form, 25
- \mathbb{R}^n , 10
- Rang
 - einer linearen Abbildung, 18
 - einer Matrix, 18
- Raum
 - euklidischer, 19
 - linearer, 14
 - unitärer, 19
- Rechenregeln

- für Determinanten, 8
 - für Matrizen, 4
- rektifizierbar, 38
- Riemann
 - Integrabilitätskriterium, 34
- Rotation, 47
- S_n , 5
- Sarrussche Regel, 6
- Satz
 - von Fubini, 36
 - für Inhalte, 30
- Schnitt, 36
- Signum
 - einer Permutation, 5
- Skalar, 14
 - enkörper, 14
 - produkt, 19
 - kanonisches, 19
- Spalten, 4
 - rang, 18
- Spann, 16
- Spur, 23
- Stammfunktion, 41
- stückweise glatt, 39
- Subadditivität, 28
- Summe
 - direkte, 25
 - von Kurven, 39
 - von Matrizen, 4
- symmetrische
 - Gruppe, 5
 - Matrix, 24
- Teilraum, 15
- trace, 23
- transponierte Matrix, 7
- Typ, 4
- unitäre
 - r Vektorraum, 19
 - Matrix, 24
- Unter
 - integral, 33
 - raum, 15
 - trivialer, 16
 - summe, 32
- Vektor
 - feld, 41
 - produkt, 49
 - raum, 14
 - Spalten-, 10
- Volumen, 27, 28
- Vorzeichen
 - einer Permutation, 5
- Würfel, 27
- Weg, 39
- Wegunabhängigkeit, 41
- Winkel
 - zwischen Vektoren, 20
- Zeilen, 4
- Zeilenrang, 18
- Zeilenstufenform, 11
- Zerlegung, 32
 - von Kurven, 39
- zulässiger Bereich, 36