Vorlesungsmanuskript zur

Maßtheorie

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2009/10

Literaturverzeichnis

[1] **R. G. Bartle**, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. Korrigierter Nachdruck des Originals von 1966. 3

[2] ——, *A modern theory of integration*, vol. 32 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[3] **H. Bauer**, *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2. Aufl., 1992. 3, 20, 30

[4] ——, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 5. Aufl., 2002. 52

[5] **W. Gawronski**, *Grundlagen der Linearen Algebra. Studienbuch für Studierende der Mathematik, Informatik, Physik und anderer Naturwissenschaften ab dem 1. Semester*, Studien-Text. Mathematik. Wiesbaden: Aula-Verlag. 413 S. DM 44.00, 1996. 17

[6] **C. Goffman**, *Reelle Funktionen*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976. Übersetzt aus dem Englischen von H. Höft.

[7] **P. R. Halmos**, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[8] **H. L. Royden**, *Real analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, 3. Aufl., 1988.

[9] **W. Rudin**, *Reelle und komplexe Analysis*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1999. Übersetzung der 3. englischen Auflage (1987) von Uwe Krieg.

Einleitung und Bezeichnungen

In den Grundvorlesungen *Analysis* wurde das Riemann-Integral für Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher definiert, aber in der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt man das Integral von viel allgemeineren Funktionen sowie bessere Sätze, welche das Vertauschen eines Grenzübergangs mit dem Integral rechtfertigen. Daher wollen wir im Folgenden das sogenannte Lebesgue-Integral kennenlernen, das in dieser Hinsicht sehr viel befriedigendere Eigenschaften hat.

In der Riemannschen Integraldefinition wird eine Funktion über ein (ein- oder mehrdimensionales) Intervall integriert. Dieses wird in kleinere Intervalle zerlegt, deren Inhalt (d. i. im eindimensionalen Fall einfach ihre Länge) zusammen mit dem Funktionswert an einer Stelle in die sog. *Riemannsumme* eingeht. In der Lebesgueschen Definition des Integrals benutzt man Zerlegungen in sehr viel allgemeinere Teilmengen, für welche aber dann eine Zahl definiert sein muss, welche dem Inhalt eines Intervalls entspricht, aber hier *Maß* genannt wird. Daher werden wir zunächst axiomatisch sogenannte *messbare Räume bzw. Maßräume* einführen. Dabei wird Ω immer eine feste nicht-leere, aber ansonsten beliebige *Grundmenge* bezeichnen. Für gewisse, jedoch *im Allgemeinen nicht für alle*, Teilmengen $A \subset \Omega$ wird dann ein Maß $\mu(A)$ definiert sein. In einfachen Fällen kann A eine "nicht zu wilde" Teilmenge von[1] $\mathbb{R}^d$ und $\mu(A)$ der Raum- bzw. Flächeninhalt von A sein, falls $d = 3$ bzw. $d = 2$ ist. Für $d = 1$ ist $\mu(A)$, im Fall dass A ein Intervall ist, oft dessen Länge, kann aber auch anders definiert sein. In der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutet Ω die Menge aller möglichen Ausgänge eines *Spieles* oder *Zufallsexperiments*, und $\mu(A)$ ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass der Spielausgang ein Element der Teilmenge A ist. Wenn man z. B. mit einem Würfel wirft, dann bietet sich an, die Menge Ω aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 6 bestehen zu lassen, und unter $\mu(A)$ die Anzahl der Elemente von $A \subset \Omega$ dividiert durch die Gesamtzahl der Elemente von Ω, also 6, zu verstehen. Dabei wird als Bezeichnung in der Regel statt μ der Buchstabe p wie "probability" verwendet. In diesem Fall ist $\mu(A) = p(A)$ also eine Zahl im abgeschlossenen Intervall von 0 bis 1, was aber allgemein nicht zu sein braucht; insbesondere kann i. A. auch der Fall $\mu(A) = \infty$ eintreten.

Abstrakt ausgedrückt ist ein Maß eine Abbildung, deren Definitionsbereich immer eine Teilmenge der *Potenzmenge*[2] von Ω ist, und dessen Werte nicht-negative reelle Zahlen oder das Symbol ∞ sind. Um eine "vernünftige Theorie" entwickeln zu können, muss der Definitionsbereich eines Maßes einige Eigenschaften haben, und das Maß selber muss entsprechende Rechenregeln erfüllen. Dieser abstrakte Ansatz macht es notwendig, dass wir zuerst *Sigma-Algebren* besprechen, bevor wir dann auf Maße eingehen und anschließend den entsprechenden Integralbegriff einführen. Dabei ist zunächst nicht klar, ob es in $\mathbb{R}^d$ überhaupt ein sinnvolles Maß gibt – der Beweis dafür wird erst später gegeben.

In dieser Vorlesung werden die üblichen Bezeichnungen für die Menge der reellen, natürlichen und rationalen Zahlen verwendet, wobei (wie auch in den Büchern von *Bauer* [3] und *Bartle* [1], die auch sonst den Inhalt dieser Vorlesung gut darstellen) die Null nicht als natürliche Zahl angesehen wird. Auch die mengentheoretischen Operationen sind wie in [3] bezeichnet, allerdings schreiben wir $A^c := \{\omega \in \Omega : \ \omega \notin A\}$ für das Komplement von A in der Grundmenge Ω. Allgemeiner schreiben wir für $A, B \subset \Omega$ auch $A \setminus B$ für die Menge aller $a \in A$, welche nicht in B liegen, sodass also $A^c = \Omega \setminus A$ und $A \setminus B = A \cap B^c$ ist. Wir nennen eine beliebige Anzahl von Mengen A_j *eine Zerlegung* einer Menge A, wenn die A_j paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung A ergibt. Weiter sei $\overline{\mathbb{R}}$ die Menge der reellen Zahlen vereinigt mit den

[1] Beachte dass in dieser Vorlesung d immer eine feste natürliche Zahl sein soll, welche die Bedeutung von Dimension hat.
[2] Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen von Ω und wird gelegentlich mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet.

Symbolen ∞ und $-\infty$. Für das Rechnen mit $\pm\infty$ soll außer den in der Analysis üblichen Regeln in dieser Vorlesung noch zusätzlich gelten

$$\infty\, 0 \;=\; -\infty\, 0 \;=\; 0\,\infty \;=\; 0\,(-\infty) \;=\; 0\,.$$

Also sind Addition und Multiplikation auf der Menge $\overline{\mathbb{R}}$ vollständig definiert, außer dass die Summe von ∞ und $-\infty$ nicht festgelegt ist, aber von Fall zu Fall passend interpretiert werden wird. Außerdem schreiben wir $\mathbb{R}_+$ für *die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen,* so dass also $0 \in \mathbb{R}_+$ ist, und $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist gleich der Menge $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Sind Ω_1, Ω_2 beliebige nicht-leere Mengen, und ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine beliebige Abbildung, so schreiben wir wie üblich

$$\forall\; A \subset \Omega_2 : \qquad f^{-1}(A) \;=\; \{\omega_1 \in \Omega_1 \,:\, f(\omega_1) \;\in\; A\}\,.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass diese Begriffsbildung nicht die Existenz einer Umkehrfunktion von f voraussetzt. Außerdem benötigen wir die folgenden einfach zu beweisenden Regeln:

$$\forall\; A, A_j \subset \Omega_2\,,\; j \in J : \qquad f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) \;=\; \bigcup_{j\in J} f^{-1}(A_j)\,, \qquad f^{-1}(A^c) \;=\; \big(f^{-1}(A)\big)^c\,.$$

Wenn die A_j paarweise disjunkt sind, dann gilt dies auch für die Urbildmengen $f^{-1}(A_j)$, und falls die A_j eine Zerlegung von Ω_2 sind, dann bilden die $f^{-1}(A_j)$ eine solche für Ω_1. Wichtig sind im Weiteren auch die *de Morganschen Regeln*: Bei beliebiger Grundmenge Ω gilt immer

$$\forall\; A_j \subset \Omega\,,\; j \in J : \qquad \bigcup_{j\in J} A_j^c \;=\; \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)^c\,, \qquad \bigcap_{j\in J} A_j^c \;=\; \Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)^c\,.$$

Als *charakteristische Funktion* einer Teilmenge $A \subset \Omega$, mit einer beliebigen nicht-leeren *Grundmenge* Ω, bezeichnen wir die Abbildung $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\chi_A(\omega) = 1$ für $\omega \in A$ und $\chi_A(\omega) = 0$ sonst.

Analog zur Vorlesung *Analysis I* nennen wir für $A \subset \Omega$ eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$ *punktweise konvergent* auf A, falls für alle $\omega \in A$ der Grenzwert $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ existiert, und in diesem Fall heißt die so definierte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auch die *Grenzfunktion* der Folge. Diese Definition kann sinngemäß auch auf Fälle ausgedehnt werden, in denen einige der Werte $f_n(\omega)$ und/oder der Grenzwert $f(\omega)$ gleich ∞ oder $-\infty$ sind.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Theorie der Maße

Wie in der Einleitung gesagt, ist Ω im Folgenden immer eine feste nicht-leere Menge, die wir gelegentlich auch *Grundmenge* nennen wollen. Die wichtigsten Beispiele sind $\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = \mathbb{R}^d$, aber Ω kann z. B. auch eine endliche Menge (etwa die für das Würfeln wichtige Menge $\{1, \ldots, 6\}$ der ganzen Zahlen von 1 bis 6), oder abzählber unendlich (also z. B. die Menge $\mathbb{N} = \{1,\, 2,\, 3 \ldots\}$ der natürlichen Zahlen), oder ein ein- oder mehrdimensionales Intervall sein. Dabei nennen wir $I \subset \mathbb{R}^d$ ein *abgeschlossenes Intervall*, wenn es $a = (a_1, \ldots, a_n),\ b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^d$ gibt, sodass

$$I \;=\; [a, b] \;:=\; \{\; x = (x_1, \ldots, x_n) \;:\quad a_j \le x_j \le b_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \;\}\,.$$

Entsprechend definieren wir offene bzw. halboffene Intervalle (a, b) bzw. $[a, b)$. Dabei ist klar, dass es neben $[a, b)$ zahlreiche andere Arten von halboffenen Intervallen in $\mathbb{R}^d$ gibt, welche aber hier keine Rolle spielen. Als *Maß* oder *Inhalt* von I bezeichnen wir die Zahl $\lambda(I) = \prod_j (b_j - a_j)$, falls I nicht die leere Menge ist, und setzen $\lambda(\emptyset) = 0$. Dabei spielt es offenbar keine Rolle, ob I abgeschlossen, offen oder halboffen ist. Für $d = 1$, bzw. $= 2$, bzw. $= 3$ ist also das Maß eines Intervalls gleich dessen Länge, bzw. Flächeninhalt, bzw. seinem Volumen.

1.1 Sigma-Algebren und messbare Räume

Definition 1.1.1 *Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt eine* Sigma-Algebra *auf Ω, falls folgende Axiome erfüllt sind:*

(A1) $\quad \emptyset \in \mathcal{A}\,,$

(A2) $\quad A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}\,,$

(A3) $\quad \big(A_n \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\big) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}\,.$

Wenn dies so ist, dann heißt das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ auch messbarer Raum*, und jedes $A \in \mathcal{A}$ heißt* messbare Teilmenge von Ω *oder einfach* messbar*. Da gelegentlich auch mehrere Sigma-Algebren auf derselben Grundmenge Ω betrachtet werden, sprechen wir auch von $\mathcal{A}$-messbaren Mengen.*

Bemerkung 1.1.2 *Wenn $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum ist, dann gelten offenbar auf Grund der de Morganschen Regeln immer folgende weitere Aussagen:*

(a) $\quad \Omega \in \mathcal{A}\,,$

(b) $$\big(A_n \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \big) \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}\,.$$

Außerdem kann man sehr leicht folgende weitere Aussagen beweisen, aus denen z. B. folgt, dass es auf jeder beliebigen Grundmenge Ω mindestens eine, meist aber sogar zahlreiche verschiedene Sigma-Algebren gibt:

(c) *Die Familie $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Teilmengen von Ω ist immer eine Sigma-Algebra, und zwar die größte, und auch $\mathcal{A} = \{\emptyset\,,\ \Omega\}$ ist immer eine Sigma-Algebra, nämlich die kleinste, auf der gegebenen Menge Ω.*

(d) *Der Durchschnitt beliebig vieler Sigma-Algebren auf Ω ist wieder eine solche Sigma-Algebra.*

(e) *Zu jeder Familie $\mathcal{C}$ von Teilmengen von Ω gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste Sigma-Algebra auf Ω, welche $\mathcal{C}$ enthält. Man erhält sie als Durchschnitt aller Sigma-Algebren, welche $\mathcal{C}$ enthalten, und wir nennen sie* die von $\mathcal{C}$ erzeugte Sigma-Algebra.

(f) *Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ heißt die von allen Intervallen erzeugte Sigma-Algebra* die Borel-Sigma-Algebra *auf $\mathbb{R}^d$. Diese soll im Folgenden immer mit $\mathcal{B}$ bezeichnet werden.*

Aufgabe 1.1.3 *Finde die von einer einzigen nicht-leeren Teilmenge $A \subset \Omega$ erzeugte Sigma-Algebra. Zeige weiter: Ist $\mathcal{C} = \{A_j\,:\,j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Zerlegung von Ω, so ist die von $\mathcal{C}$ erzeugte Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ gleich*

$$\mathcal{A} \;=\; \Big\{\, \bigcup_{j \in J} A_j \;:\; J \subset \mathbb{N} \,\Big\}.$$

Überlege, ob dies auch für überabzählbare Zerlegungen gilt. Überlege weiter, warum es allgemein schwierig ist, die von einer Familie $\mathcal{C}$ von Teilmengen von Ω erzeugte Sigma-Algebra zu beschreiben.

Aufgabe 1.1.4 *Beweise die Aussagen der vorangegangenen Bemerkung. Bestimme weiterhin diejenigen Grundmengen Ω, auf welchen es nur eine, bzw. nur endlich viele, bzw. unendlich viele verschiedene Sigma-Algebren gibt.*

Aufgabe 1.1.5 *Zeige dass die Borel-Sigma-Algebra $\mathcal{B}$ bereits von der Menge aller offenen, aber auch von allen abgeschlossenen, oder allen halboffenen, Intervallen erzeugt wird, und dass $\mathcal{B}$ alle offenen, aber auch alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ enthält. Zeige weiter, dass sogar die von den Intervallen der Form $(-\infty, a)$ erzeugte Sigma-Algebra gleich $\mathcal{B}$ ist.*

Aufgabe 1.1.6 *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, und sei $\emptyset \neq E_0 \in \mathcal{A}$ beliebig gegeben. Zeige dass $\mathcal{A}_{E_0} := \{\, E \cap E_0 \;:\; E \in \mathcal{A} \,\}$ eine Sigma-Algebra auf E_0 ist. Wir nennen den messbaren Raum $(E_0, \mathcal{A}_{E_0})$ gelegentlich auch* Unterraum *von $(\Omega, \mathcal{A})$ und sprechen manchmal der Einfachheit halber auch vom* Unterraum E_0*, wobei dann immer die Sigma-Algebra $\mathcal{A}_{E_0}$ auf E_0 betrachtet werden soll.*

1.2 Messbare Funktionen

Im Folgenden sei auf Ω immer eine feste, aber beliebige Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ gegeben.

Definition 1.2.1 *Eine Funktion $f\,:\,\Omega \to \mathbb{R}$ heißt* $\mathcal{A}$-messbar*, oder auch kurz* messbar *wenn klar ist, auf welche Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ wir uns beziehen, falls gilt:*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad \{\, \omega \in \Omega \;:\; f(\omega) \;>\; \alpha \,\} \;\in\; \mathcal{A}\,.$$

Aufgabe 1.2.2 *Zeige, dass die charakteristische Funktion χ_A einer Teilmenge $A \subset \Omega$ genau dann messbar ist, wenn $A \in \mathcal{A}$ liegt. Schließe hieraus: Genau dann sind alle Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist.*

Aufgabe 1.2.3 *Zeige, dass eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann messbar ist, wenn für jede Menge B aus der Borel-Sigma-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ gilt, dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist. Vergleiche dies mit* Definition 1.4.1.

Lemma 1.2.4 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad \{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; > \; \alpha \,\} \in \mathcal{A}$.

(b) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad \{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; \leq \; \alpha \,\} \in \mathcal{A}$.

(c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad \{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; \geq \; \alpha \,\} \in \mathcal{A}$.

(d) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad \{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; < \; \alpha \,\} \in \mathcal{A}$.

Beweis: Die Äquivalenz von (a) und (b), sowie von (c) und (d) ist klar nach Axiom (A2). Die anderen Äquivalenzen folgen wegen

$$\{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; \geq \; \alpha \,\} \; = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; > \; \alpha \; - 1/n \} \,,$$

und einer analogen Aussage für die Vereinigung von Mengen der Form $\{\, \omega \in \Omega \; : \; f(\omega) \; \geq \; \alpha \; + 1/n \}$. □

Beispiel 1.2.5 *Konstante Funktionen sind immer messbar, und für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist die* charakteristische Funktion $\chi_A(\omega) = 1$ *ebenfalls messbar. Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A}$ gleich der Borel-Sigma-Algebra $\mathcal{B}$ ist, dann sind alle stetigen Funktionen auch messbar, und für $d = 1$ sind alle monotonen Funktionen ebenfalls messbar.*

Aufgabe 1.2.6 *Beweise die im vorangegangenen Beispiel gemachten Aussagen. Zeige weiter: Genau dann ist eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, wenn für jede offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$.*

Aufgabe 1.2.7 *Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige die Messbarkeit der Hintereinanderausführung $g \circ f$.*

Im Folgenden schreiben wir kurz $\{f(\omega) > \alpha\}$ für die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche diese Ungleichung gilt, und verfahren analog bei anderen Ungleichungen wie $f(\omega) \leq \alpha$, $\alpha < f(\omega) \leq \beta$ u. s. w.

Lemma 1.2.8 *Seien f und g messbare Funktionen auf Ω, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $c\,f$, f^2, $f+g$, $f\,g$ und $|f|$ messbar.*

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $c = 0$ ist $c\,f$ konstant, für $c > 0$ gilt $\{c\,f(\omega) > \alpha\} = \{f(\omega) > \alpha/c\}$, und für $c < 0$ ist $\{c\,f(\omega) > \alpha\} = \{f(\omega) < \alpha/c\}$, und deshalb folgt die Messbarkeit von $c\,f$ in allen Fällen. Wegen $\{f^2(\omega) > \alpha\} = \{f(\omega) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f(\omega) < -\sqrt{\alpha}\}$ für $\alpha \geq 0$ bzw. $\{f^2(\omega) > \alpha\} = \Omega$ im anderen Fall folgt die Messbarkeit von f^2. Wegen (A3) und der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen folgt

$$\{f(\omega) + g(\omega) > \alpha\} \;=\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{f(\omega) > q\} \cap \{g(\omega) > \alpha - q\}\big) \;\in\; \mathcal{A}\,,$$

und daher ist die Summe $f + g$ messbar.Aus der Identität $4\,f\,g = [\,(f+g)^2 - (f-g)^2]$ und dem bereits gezeigten folgt die Messbarkeit des Produktes $f\,g$. Die Messbarkeit von $|f|$ folgt analog wie die von f^2. □

Definition 1.2.9 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Die Funktionen*

$$f^+(\omega) \;=\; \max\{f(\omega), 0\} \qquad f^-(\omega) \;=\; \max\{-f(\omega), 0\} \qquad \forall\, \omega \in \Omega$$

heißen der positive *bzw.* negative Anteil *von f. Es gilt offenbar*

$$f \;=\; f^+ \;-\; f^-\,, \qquad |f| \;=\; f^+ \;+\; f^-\,, \qquad f^+ \;=\; (|f| + f)/2\,, \qquad f^- \;=\; (|f| - f)/2\,,$$

und daher folgt die Messbarkeit von f^+, f^- mittels des letzten Lemmas, falls f selber messbar ist.

1.3 Funktionen mit unendlich großen Werten

Definition 1.3.1 *Wir sagen dass eine Abbildung $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f(\omega) > \alpha\}$ immer zur Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ gehört. Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Mit $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ wird die Menge aller $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ bezeichnet; beachte aber, dass ein solches f auch den Wert ∞ annehmen kann.*

Lemma 1.3.2 *Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, und sei $g(\omega) = f(\omega)$ falls $f(\omega) \in \mathbb{R}$ ist, sowie $g(\omega) = 0$ falls $f(\omega) = \pm\infty$ ist. Die Funktion f ist genau dann messbar, wenn g messbar ist, und wenn zusätzlich die Mengen $A_+ = \{f(\omega) = \infty\}$ und $A_- = \{f(\omega) = -\infty\}$ zu $\mathcal{A}$ gehören.*

Beweis: Sei f messbar. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt dann

$$A_+ \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f(\omega) > n\} \;\in\; \mathcal{A}\,, \qquad A_-^c \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(\omega) > -n\} \;\in\; \mathcal{A}\,,$$

und weiter ist

$$\{g(\omega) > \alpha\} \;=\; \{f(\omega) > \alpha\} \setminus A_+ \qquad \forall\, \alpha \geq 0\,, \qquad \{g(\omega) > \alpha\} \;=\; \{f(\omega) > \alpha\} \cup A_- \qquad \forall\, \alpha < 0\,.$$

Daraus folgt die Messbarkeit von g. Umgekehrt folgt aus $A_\pm \in \mathcal{A}$ und der Messbarkeit von g wegen

$$\{f(\omega) > \alpha\} \;=\; \{g(\omega) > \alpha\} \cup A_+ \qquad \forall\, \alpha \geq 0\,, \qquad \{f(\omega) > \alpha\} \;=\; \{g(\omega) > \alpha\} \setminus A_- \qquad \forall\, \alpha < 0$$

auch wieder die Messbarkeit von f. □

Bemerkung 1.3.3 *Aus dem letzten Lemma folgt, dass* Lemma 1.2.4 *auch für Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ gilt. Weiter folgt dass für alle $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ und alle $c \in \mathbb{R}$ immer gilt*

$$c\,f\,,\; f^2\,,\; |f|\,,\; f^+\,,\; f^- \;\in\; M(\Omega, \mathcal{A})\,.$$

Allerdings ist für $f, g \in M(\Omega, \mathcal{A})$ die Summe $f + g$ zunächst undefiniert auf den Mengen

$$E_1 \;=\; \{f(\omega) = \infty\} \cap \{g(\omega) = -\infty\}\,, \quad E_2 \;=\; \{f(\omega) = -\infty\} \cap \{g(\omega) = \infty\}\,.$$

Gelegentlich ist es sinnvoll zu vereinbaren, dass $(f + g)(\omega) = 0$ ist für $\omega \in E_1 \cup E_2$, und in diesem Fall folgt $f + g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.

Aufgabe 1.3.4 *Zeige für eine beliebige Folge (f_n) von Funktionen in $\overline{\mathbb{R}}$ dass*

$$\liminf_{n\to\infty}\; f_n(\omega) \;=\; \sup_{n\geq 1}\; \inf_{m\geq n}\; f_m(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

und finde selber eine entsprechende Aussage für den limes superior.

Aufgabe 1.3.5 *Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ so, dass für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\{f(\omega) > q\} \in \mathcal{A}$. Zeige $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.*

Lemma 1.3.6 *Für jede Folge (f_n) von Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ sind auch die durch*

$$f(\omega) \;=\; \inf_{n \geq 1} \, f_n(\omega)\,, \quad F(\omega) \;=\; \sup_{n \geq 1} \, f_n(\omega)\,, \quad f^*(\omega) \;=\; \liminf_{n \to \infty} \, f_n(\omega)\,, \quad F^*(\omega) \;=\; \limsup_{n \to \infty} \, f_n(\omega)$$

definierten Funktionen in $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Insbesondere ist für jede punktweise konvergente Folge messbarer Funktionen auch die Grenzfunktion wieder messbar.

Beweis: Wegen Aufgabe 1.3.4 genügt es, f und F zu betrachten. Deren Messbarkeit folgt aber mit Hilfe von Bemerkung 1.3.3 wegen

$$\{f(\omega) \geq \alpha\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n(\omega) \geq \alpha\}\,, \qquad \{F(\omega) > \alpha\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n(\omega) > \alpha\}\,.$$

□

Korollar zu Lemma 1.3.6 *Für alle $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ist $f\, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.*

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$f_n(\omega) \;=\; \begin{cases} f(\omega) & \text{falls} \quad |f(\omega)| \leq n\,, \\ n & \text{falls} \quad f(\omega) > n\,, \\ -n & \text{falls} \quad f(\omega) < -n\,, \end{cases}$$

und g_n seien analog definiert. Dann folgt leicht dass alle $f_n, g_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ sind, und da sie alle nur endliche Werte haben, folgt aus Lemma 1.2.8 $f_n\, g_m \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 1.3.6 folgt dann für $n \to \infty$ bzw. $m \to \infty$ dass $f\, g_m \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ bzw. $f\, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$. □

Aufgabe 1.3.7 *Sei $E \in \mathcal{A}$ nicht leer, und sei $\mathcal{A}_E$ wie in* Aufgabe 1.1.6 *definiert. Zeige: Für beliebiges $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ist die Restriktion von f auf die Menge E immer in $\mathcal{M}(E, \mathcal{A}_E)$. Umgekehrt, wenn $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{A}_E)$ gegeben ist, und wenn wir $f(\omega) = 0$ setzen, falls $\omega \in E^c$ ist, dann ist diese Fortsetzung von f in $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.*

1.4 Abbildungen zwischen messbaren Räumen

Im Folgenden seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ beliebige messbare Räume, wobei j durch eine evtl. unendlich große Indexmenge J laufen kann. In der nächsten Definition ist allerdings zunächst $J = \{1, 2\}$.

Definition 1.4.1 *Eine Abbildung $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt* $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-messbar*, oder manchmal kurz* messbar*, falls gilt*

$$\forall\; A \in \mathcal{A}_2 \;: \qquad T^{-1}(A) \;\in\; \mathcal{A}_1\,. \tag{1.4.1}$$

Für eine beliebige Anzahl messbarer Räume $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$, eine weitere nicht-leere Menge Ω und beliebige Abbildungen $T_j : \Omega \to \Omega_j$, mit $j \in J$, gibt es genau eine kleinste Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω, so dass alle T_j messbar sind; diese ist die von den Mengen $T^{-1}(A_j)$, mit beliebigem $A_j \in \mathcal{A}_j$ und beliebigem $j \in J$, erzeugte Sigma-Algebra. Wir sagen dann auch, dass der messbare Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ von den Abbildungen T_j erzeugt *oder* rückwärts induziert wird*.*

Aufgabe 1.4.2 *Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$ so, dass $\mathcal{A}_2$ von $\mathcal{C}$ erzeugt wird – dass also $\mathcal{A}_2$ die kleinste Sigma-Algebra ist, die alle Mengen aus $\mathcal{C}$ enthält. Zeige: Genau dann ist $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ messbar, wenn für alle $c \in \mathcal{C}$ gilt $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_1$. Benutze dies und die Definition der Borel-Sigma-Algebra um zu zeigen, dass die Definition von Messbarkeit für reellwertige Funktionen mit der hier gegebenen übereinstimmt, wenn man auf $\mathbb{R}$ die Borel-Sigma-Algebra $\mathcal{B}$ betrachtet. Vergleiche auch mit* Aufgabe 1.2.3.

Aufgabe 1.4.3 *Zeige dass stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^m$ immer bezüglich der Borel-Sigma-Algebren messbar sind.* **Anleitung:** *Es darf benutzt werden, dass für stetige Funktionen die Urbilder offener Mengen wieder offen sind.*

Aufgabe 1.4.4 *Seien jetzt drei messbare Räume $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2, 3$, gegeben. Zeige: Wenn $T_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $T_2 : \Omega_2 \to \Omega_3$ beide messbar sind, dann ist auch die Hintereinanderausführung $T_2 \circ T_1 : \Omega_1 \to \Omega_3$ messbar.*

1.5 Einfache Funktionen

Definition 1.5.1 *Wir nennen ein $\phi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ eine* einfache Funktion, *wenn sie nur endlich viele reelle Werte annimmt. Wenn ϕ nicht die Nullfunktion ist, bezeichnen wir diejenigen Werte von ϕ, welche $\neq 0$ sind, mit $c_1, \ldots, c_n$, sodass diese Zahlen also alle verschieden sind. Dann sind die Mengen*

$$A_j \;=\; \{\omega \;:\; \phi(\omega) = c_j\} \;\in\; \mathcal{A} \quad (1 \le j \le n)\,, \tag{1.5.1}$$

paarweise disjunkt, aber im Allgemeinen ist ihre Vereinigung nicht gleich Ω, da ϕ auch die Zahl 0 *als Wert annehmen kann. Es gilt aber in jedem Fall*

$$\phi \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j\,\chi_{A_j}\,. \tag{1.5.2}$$

Insbesondere ist $\phi(\omega) = 0$ genau dann, wenn $\omega \notin \cup_j A_j$ ist. Die Menge der einfachen messbaren Funktionen ist genau die lineare Hülle aller charakteristischen Funktionen von Mengen aus $\mathcal{A}$. Die Darstellung einer einfachen Funktion in der Form (1.5.2) *ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Summanden und wird im Folgenden* Standarddarstellung *genannt. Beachte aber, dass auch die Nullfunktion einfach ist, und wir erhalten deren Standarddarstellung, indem wir in* (1.5.2) *$n = 0$ setzen, so dass die Summe leer ist.*

In den Lehrbüchern ist die Standarddarstellung einfacher Funktionen meist etwas anders definiert – der Vorteil unserer Definition zeigt sich z. B. in der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1.5.2 *Zeige dass für jede nicht-triviale einfache Funktion ϕ in Standarddarstellung* (1.5.2) *und jedes $A \in \mathcal{A}$ die Funktion $\phi\,\chi_A$ ebenfalls einfach ist und die Darstellung*

$$\phi\,\chi_A \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j\,\chi_{A \cap A_j}$$

besitzt. Dies ist auch die Standarddarstellung, wenn wir die Terme mit $A \cap A_j = \emptyset$ ignorieren.

Für manche messbaren Räume (welche?) sind alle messbaren Funktionen auch einfache Funktionen – das nächste Lemma zeigt, dass auch bei allgemeinen Räumen die messbaren Funktionen nicht so viel allgemeiner als die einfachen Funktionen sind, und das ist in gewissem Sinne der Schlüssel zur Lebesgueschen Integraldefinition.

Lemma 1.5.3 *Jedes $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ ist der punktweise Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von einfachen Funktionen $\phi_n \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$.*

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, n\,2^n - 1$ sei

$$E_{k,n} \;=\; \{\; k\,2^{-n} \;\leq\; f(\omega) \;<\; (k+1)\,2^{-n} \;\}\,, \qquad E_{n\,2^n,n} \;=\; \{\; f(\omega) \;\geq\; n \;\}\,.$$

Für jedes feste n bilden die Mengen $E_{k,n}$ eine Zerlegung von Ω in messbare Mengen, und wir setzen

$$\phi_n \;=\; \sum_{k=1}^{n2^n} k\,2^{-n}\,\chi_{E_{k,n}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Die so definierten Funktionen sind offenbar einfach. Da bei Übergang von n zu $n+1$ die Mengen $E_{k,n}$ weiter in Teilmengen zerlegt werden, ergibt sich, dass die Folge ϕ_n monoton wächst. Falls $f(\omega) = \infty$ ist, ist $\omega \in E_{n\,2^n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dann folgt $\phi_n(\omega) \to \infty$ für $n \to \infty$. Im anderen Fall folgt für $n > f(\omega)$ dass $0 \leq f(\omega) - \phi_n(\omega) \leq 2^{-n}$ ist, woraus ebenfalls folgt $\phi_n(\omega) \to f(\omega)$ für $n \to \infty$. □

1.6 Maße und Maßräume

Definition 1.6.1 *Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* ein Maß *auf $\mathcal{A}$, falls folgendes gilt:*

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) $\forall\; A \;\in\; \mathcal{A} \;:\quad \mu(A) \;\geq\; 0$.

(M3) Für jede Folge (A_n) von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{A}$ ist $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Die Eigenschaft (M3) *heißt auch* Sigma-Additivität. *Falls $\mu(\Omega) < \infty$ ist, dann folgt wegen der Sigma-Additivität, dass das Maß überhaupt nur endliche Werte annimmt, und solche Maße werden* endlich *genannt. Falls Ω die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen E_n mit $\mu(E_n) < \infty$ ist, dann heißt μ auch* sigma-endlich. *Ist auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maß μ gegeben, dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ auch kurz* ein Maßraum.

Aufgabe 1.6.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $E \in \mathcal{A}$ nicht leer, sowie $\mathcal{A}_E$ wie in* Aufgabe 1.1.6. *Zeige dass die Einschränkung von μ auf $\mathcal{A}_E$ wieder ein Maß ergibt. Wir werden gelegentlich $(E, \mathcal{A}_E, \mu)$ auch als Unterraum von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bezeichnen, ohne darauf hinzuweisen, dass dabei μ eigentlich gleich der Restriktion des ursprünglichen Maßes ist. Zeige weiter: Wenn ν irgendein Maß auf $(E, \mathcal{A}_E)$ ist, und wenn wir $\sigma(A) := \nu(A \cap E)$ für $A \in \mathcal{A}$ setzen, dann erhalten wir ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Berechne $\sigma(E^c)$.*

Beispiel 1.6.3 *Auf jedem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist die Nullabbildung ein Maß auf $\mathcal{A}$. Genauso ist durch*

$$\mu(A) \;=\; \begin{cases} 0 & \textit{falls } A = \emptyset \\ \infty & \textit{falls } A \neq \emptyset \end{cases}$$

ein Maß gegeben. Mit festem, aber beliebigem $p \in \Omega$ ist

$$\mu_p(A) \;=\; \begin{cases} 0 & \textit{falls } p \notin A \\ 1 & \textit{falls } p \in A \end{cases}$$

ein endliches Maß; es heißt das in p konzentrierte Einpunktmaß. *Ein weiteres Maß, das sogenannte* Zählmaß, *ergibt sich, wenn man $\mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$ gleich der Anzahl der Elemente von A setzt; dieses Maß* *ist endlich, falls Ω eine endliche Menge ist, es ist sigma-endlich, falls Ω abzählbar ist. Alle diese Maße sind insbesondere auf der Potenzmenge von Ω definiert. Später werden wir zeigen, dass es auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ genau ein Maß λ gibt, welches jedem Intervall seinen Inhalt zuordnet; dieses soll* Lebesgue- *oder* Borelmaß *genannt werden. Schließlich gibt es zu jeder monoton wachsenden und rechtsseitig stetigen Funktion g auf $\mathbb{R}$ genau ein Maß λ_g auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, welches jedem halboffenen Intervall $(a, b]$ mit $a < b$ die Zahl $g(b) - g(a)$ zuordnet; es heißt das* von g erzeugte Lebesgue- *oder Borel-Stieltjes-Maß. Seine Existenz wird ebenfalls später bewiesen. In den Übungen werden wir aber die Existenz dieser Maße voraussetzen.*

Aufgabe 1.6.4 *Seien μ und ν zwei Maße auf $\mathcal{A}$. Zeige dass $\sigma = \mu + \nu$ ebenfalls ein Maß ist. Zeige weiter: Wenn μ und ν beide sigma-endlich sind, dann gilt dasselbe auch für σ.*

Aufgabe 1.6.5 (Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume) *Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, und sei (p_j) eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Zeige dass durch*

$$p(A) \;=\; \sum_{j \in A} p_j \qquad \forall\; A \subset \mathbb{N}$$

ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiert wird. Überlege, wie man ein analoges Maß auf jeder abzählbaren Menge Ω definieren kann. Falls zusätzlich noch gilt, dass $\sum_j p_j = 1$ ist, nennt man einen solchen Maßraum auch diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. *Allgemeiner spricht man immer von einem* Wahrscheinlichkeitsraum *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wenn $\mu(\Omega) = 1$ ist, und in diesem Fall verwendet man statt μ meist den Buchstaben p wie "probability" zur Bezeichnung des Maßes. Die Interpretation ist dann so, dass bei einem Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Ausgang des Experimentes in A liegt, gleich $p(A)$ ist.*

Im Folgenden sei immer ein fester Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gegeben.

Lemma 1.6.6 *Für $E, F \in \mathcal{A}$ mit $E \subset F$ gilt immer $\mu(E) \leq \mu(F)$. Falls zusätzlich $\mu(E) < \infty$ ist, gilt auch $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Beweis: Es ist immer $F = E \cup (F \setminus E)$ und $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$, und deshalb folgt die Behauptung aus (M3) – beachte, dass in (M3) einige der Mengen A_n auch leer sein können! □

Aufgabe 1.6.7 (Subadditivität des Maßes) *Sei (A_n) eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$, welche nicht notwendigerweise paarweise disjunkt sind. Zeige*

$$\mu\,\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Man nennt diese Eigenschaft eines Maßes auch seine Subadditivität.

Lemma 1.6.8 (Monotonie bzw. Stetigkeit des Maßes) *Sind $E_n \in \mathcal{A}$ mit $E_n \subset E_{n+1}$, für $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so gilt immer*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)\,.$$

Sind $F_n \in \mathcal{A}$ mit $F_n \supset F_{n+1}$, für $n \in \mathbb{N}$ gegeben, und ist $\mu(F_1) < \infty$, so gilt immer

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)\,.$$

Beweis: Falls für irgend ein n gilt $\mu(E_n) = \infty$, dann folgt aus dem vorangegangenen Lemma das gleiche für alle größeren n, und daher gilt dann die erste Behauptung. Falls umgekehrt alle $\mu(E_n) < \infty$ sind, dann setzen wir $A_1 = E_1$ und $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind die A_n paarweise disjunkt, und ihre Vereinigung ist gleich der der E_n. Daher gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;=\; \mu(E_1) \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)\,.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, wenn man $E_n = \Omega \setminus F_n$ setzt und die de Morganschen Regeln verwendet. □

Aufgabe 1.6.9 *Zeige dass im letzten Lemma die Voraussetzung $\mu(F_1) < \infty$ im Allgemeinen nicht weggelassen werden darf.*

Aufgabe 1.6.10 *Sei $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, und seien $A_n = \{f(\omega) > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_\infty = \{f(\omega) > 0\}$. Zeige dass die Folge $(\mu(A_n))$ monoton wächst und gegen $\mu(A_\infty)$ konvergiert.*

Proposition 1.6.11 *Seien $(\Omega_1\,, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ zwei messbare Räume, und sei $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine messbare Abbildung. Falls auf $\mathcal{A}_1$ ein Maß μ gegeben ist, dann wird durch*

$$\mu_T(B) \;=\; \mu(T^{-1}(B)) \qquad \forall\, B \in \mathcal{A}_2 \tag{1.6.1}$$

ein Maß auf $\mathcal{A}_2$ definiert.

Beweis: Wenn paarweise disjunkte Mengen $B_n \in \mathcal{A}_2$ gegeben sind, dann sind auch die Urbildmengen $T^{-1}(B_n)$ paarweise disjunkt, und daher folgt

$$\mu_T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Big) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(B_n) \Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(B_n)) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_T(B_n)\,.$$

Die übrigen Eigenschaften eines Maßes werden von μ_T offenbar erfüllt. □

Definition 1.6.12 *Seien $(\Omega_1\,, \mathcal{A}_1, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein messbarer Raum, und sei $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine messbare Abbildung. Das in* Proposition 1.6.11 *definierte Maß μ_T auf $\mathcal{A}_2$ wird im Folgenden auch als* Bildmaß *bezeichnet.*

Aufgabe 1.6.13 (Verteilungsfunktionen) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also $\mu(\Omega) = 1$, und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit*

$$F(t) \;=\; \mu\big(\{\, f(\omega) \leq t\,\}\big) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{1.6.2}$$

heißt Verteilungsfunktion *von f. Zeige dass F monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist, und dass $F(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ bzw. $F(t) \to 1$ für $t \to \infty$ gilt. Überlege, ob man eine solche Verteilungsfunktion auch bei einem allgemeinen Maßraum definieren kann, und ob diese dann analoge Eigenschaften hat bzw. wo Unterschiede auftreten.*

Aufgabe 1.6.14 *Berechne die Verteilungsfunktion einer einfachen Funktion ϕ.* **Anleitung***: Betrachte statt der Standarddarstellung von ϕ besser eine derselben Form (1.5.2), wobei aber auch eine der Zahlen c_j gleich 0 sein kann, so dass dann die Mengen A_j immer eine Zerlegung von Ω ergeben, und beachte dass dann o. B. d. A. vorausgesetzt werden kann, dass die Zahlen c_j streng monoton wachsen.*

Aufgabe 1.6.15 *Benutze die Eindeutigkeit der Lebesgue-Stieltjes-Maße um zu zeigen: Wenn $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, sowie $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ die zugehörige Verteilungsfunktion ist, dann ist das durch* Proposition 1.6.11 *gegebene Maß auf $\mathbb{R}$ gleich dem durch F definierten Lebesgue-Stieltjes-Maß.*

Definition 1.6.16 *Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt* Nullmenge, *wenn $\mu(N) = 0$ ist. Wenn irgend eine Aussage $A(\omega)$ für alle $\omega \in E \setminus N$ mit einer Nullmenge N gilt, dann sagen wir dass $A(\omega)$* μ-fast überall auf E richtig ist *und schreiben $A(\omega)$* μ–f. ü. *auf E; falls $E = \Omega$ ist, schreiben wir auch kürzer $A(\omega)$* μ–f. ü. *Wir sagen insbesondere dass eine Funktion f auf Ω* μ–f. ü. *definiert ist, wenn es eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, so dass f auf N^c definiert ist. Eine solche Funktion heißt* messbar, *falls es möglich ist, $f(\omega)$ für $\omega \in N$ so zu definieren, dass die fortgesetzte Funktion messbar ist.*

Aufgabe 1.6.17 (Messbarkeit f. ü. definierter Funktionen) *Sei f auf Ω* μ–f. ü. *definiert. Nach Definition gibt es dann eine Nullmenge $N \subset \Omega$, so dass f auf N^c definiert ist. Zeige:*

(a) *Wenn f messbar ist, wenn also $f(\omega)$ für $\omega \in N$ so definiert werden kann, dass die fortgesetzte Funktion messbar ist, dann kann man o. B. d. A. setzen $f(\omega) = 0$ für $\omega \in N$.*

(b) *Wenn es eine Teilmenge $B \subset N$ gibt, welche nicht messbar ist, dann gibt es eine Fortsetzung von f, welche nicht messbar ist. Vergleiche hierzu auch* Definition 1.8.1.

(c) *Die Definition der Messbarkeit einer* μ–f. ü. *definierten Funktion hängt nicht von der Wahl der Nullmenge N ab.*

1.7 Einige Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes

Im Folgenden gehen wir von der Existenz und Eindeutigkeit des Lebesguemaßes in $\mathbb{R}^d$ aus und verwenden die Ergebnisse des letzten Abschnittes, um einige einfache Eigenschaften dieses Maßes abzuleiten.

Satz 1.7.1 (Eigenschaften des Lebesguemaßes) *Das Lebesguemaß auf der Borel-Sigma-Algebra in $\mathbb{R}^d$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Das Lebesguemaß jeder abzählbaren Menge ist gleich Null.*

(b) *Eine nichtleere offene Menge in $\mathbb{R}^d$ hat positives Lebesguemaß.*

(c) *Eine beschränkte messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ hat endliches Lebesguemaß.*

(d) *Es gibt überabzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$, deren Lebesguemaß gleich Null ist.*

(e) *Das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^d$ ist translationsinvariant, d. h., für jede Lebesguemessbare Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ und jedes $a \in \mathbb{R}^d$ ist auch $a + E$ Lebesguemessbar, und E und $a + E$ haben dasselbe Lebesguemaß.*

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der Sigma-Additivität und der Tatsache, dass jede einelementige Menge in $\mathbb{R}^d$ ein Intervall mit Inhalt Null ist. Die zweite ergibt sich aus Lemma 1.6.6, da jede offene Menge ein nicht-leeres offenes Intervall enthält. Die dritte folgt, da eine beschränkte Menge in einem (beschränkten) Intervall enthalten ist. Für die nächste Aussage betrachten wir die sogenannte *Cantor-Menge*: Beginnend mit dem abgeschlossenen Intervall $M_0 = [0, 1]$ konstruieren wir eine Folge (M_n) abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dabei ist jedes M_n die Vereinigung von 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n}, und um M_{n+1} zu erhalten, zerlegen wir jedes Teilintervall von M_n in drei gleiche Teile und entfernen das Innere des mittleren Drittels. Das Lebesguemaß von M_n ist also gleich $(2/3)^n$, und aus der Stetigkeit des Maßes folgt dass der Durchschnitt M aller M_n eine Nullmenge ist. Stellt man die reellen Zahlen als 3-adische Dezimalbrüche dar, so liegen in M genau die Zahlen, die nicht die Ziffer

1 enthalten (und, bis auf die Zahl 1, nicht die triviale Periode $\overline{2}$ enthalten). Daher ist M gleichmächtig zur Menge M_0, also überabzählbar. Die letzte Aussage folgt aus der Tatsache, dass die Translation jedes Intervalls wieder ein Intervall gleichen Inhaltes ist. Wenn wir also $\mu_a(E) = \lambda(a+E)$ setzen, so erhalten wir ein Maß auf der Borel-Sigma-Algebra, welches auf Intervallen mit dem Lebesguemaß übereinstimmt. Wegen der Eindeutigkeit des Lebesguemaßes folgt dann aber $\mu_a = \lambda$. □

Mit Hilfe der Translationsinvarianz kann man jetzt die weitergehende Eigenschaft der Bewegungsinvarianz zeigen. Dazu brauchen wir folgenden Begriff:

Definition 1.7.2 *Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt* eine Bewegung, *wenn gilt*

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^d : \qquad \|T(x) - T(y)\| \ = \ \|x - y\| \,.$$

Die Abbildung heißt affin, *wenn es ein $b \in \mathbb{R}^d$ und eine d- reihige quadratische Matrix A gibt, so dass $T(x) = A\,x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Eine affine Abbildung ist genau dann eine Bewegung, wenn A eine orthogonale Matrix ist.*

Aufgabe 1.7.3 *Zeige dass jede Bewegung immer affin sein muss – vergleiche hierzu z. B. das Buch* [5]. *Benutze dies um weiter zu zeigen: Wenn $a \in \mathbb{R}^d$ ist, dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}^d$, so dass $T_a \circ T = T \circ T_b$ ist, wobei $T_a(x) = x + b$ eine Translation um den Vektor a sein soll, und entsprechend für b.*

Satz 1.7.4 (Bewegungsinvarianz des Lebesguemaßes) *Für jedes feste $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{B}$ die Borel-Sigma-Algebra in $\mathbb{R}^d$, und $W = [0, e)$ mit $e := \{(1, \ldots, 1)$ sei der d-dimensionale Einheitswürfel in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt:*

(a) *Wenn μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}$ ist, und wenn $\alpha := \mu(W) < \infty$ ist, dann ist $\mu(E) = \alpha\,\lambda(E)$ für alle $E \in \mathcal{B}$.*

(b) *Das Lebesguemaß ist das einzige translationsinvariante Maß λ auf $\mathcal{B}$ mit $\lambda(W) = 1$.*

(c) *Das Lebesguemaß ist bewegungsinvariant.*

Beweis: Wenn $W_n = [0, n^{-1}e) := \{(x_1, \ldots, x_d) :\ 0 \le x_j < 1/n,\ 1 \le j \le d\}$ ist, wobei $n \in \mathbb{N}$ liegt, dann ist $W = W_1$ die disjunkte Vereinigung von n^d Würfeln, welche alle Translationen von W_n sind, und daher folgt $\mu(W_n) = \alpha/n^d$. Wenn jetzt $I = [a, b)$ ein beliebiges nichtleeres d-dimensionales Intervall ist, dann ist $\mu(I) = \mu([0, b - a))$, und durch Approximation "von innen" mit Vereinigungen von Translationen von W_n und Grenzbergang $n \to \infty$ kann gezeigt werden, dass $\mu(I) = \alpha\,\lambda(I)$ ist. Daraus und der Definition von $\mathcal{B}$ folgt Behauptung (a). Die zweite Behauptung ist offenbar eine Konsequenz der ersten. Um (c) zu zeigen, sei eine beliebige Bewegung T gegeben, und für jedes $E \in \mathcal{B}$ sei $\lambda_T(E) := \lambda(T^{-1}(E))$, also das zugehörige Bildmaß. Von diesem Maß zeigt man mit Aufgabe 1.7.3 sehr leicht die Translationsinvarianz, und dann gibt es nach (a) ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda_T = \alpha\,\lambda$. Wenn jetzt aber E die Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$ ist, dann sieht man, dass T diese auf eine Translation von E abbildet, so dass $\lambda_T(E) = \lambda(E)$ ist, und daher muss $\alpha = 1$ sein. □

Wünschenswert wäre es, wenn das Lebesguemaß für alle Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ definierbar wäre; dass dies nicht möglich ist, zeigt die folgende Proposition:

Proposition 1.7.5 *Sei μ ein auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ definiertes translationsinvariantes Maß. Dann sind entweder alle beschränkten Mengen Nullmengen, oder jede Menge mit nichtleerem Inneren hat unendliches Maß.*

Beweis: Sei $I = [0, 1]^d$ der abgeschlossene d-dimensionale Einheitswürfel. Für $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d) \in I$ definieren wir durch

$$x \ \sim \ y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \ - \ y_1 \ \in \ \mathbb{Q}$$

eine Äquivalenzrelation auf I. Mit Hilfe des Auswahlaxioms können wir aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählen, und wir bezeichnen mit E die Menge aller so erhaltenen Repräsentanten. Wenn $I_2 = [-1, 2] \times I^{d-1}$ ist, folgt

$$I \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q\, e_1 + E) \quad \subset I_2 \,,$$

wobei e_1 der erste Einheitsvektor ist. Da die Mengen $q\, e_1 + E$ paarweise disjunkt sind, folgt mit der Sigma-Additivität und der Translationsinvarianz von μ, dass

$$\mu(I) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q\, e_1 + E) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(E) \leq \mu(I_2) \,.$$

Falls $\mu(E) = 0$ ist, folgt hieraus $\mu(I) = 0$, und im anderen Fall ergibt sich $\mu(I_2) = \infty$. Wenn man erneut die Sigma-Additivität und Translationsinvarianz von μ benutzt, folgt die Behauptung. □

1.8 Vervollständigung von Maßen

Definition 1.8.1 *Die Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* vollständig*, falls jede Teilmenge einer Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ wieder zu $\mathcal{A}$ gehört. Dies ist nicht immer der Fall; z. B. kann man zeigen, dass die Borel–Sigma–Algebra nicht vollständig ist. Die von den Mengen $A \in \mathcal{A}$ und allen Teilmengen $Z \subset N$, mit $\mu(N) = 0$, erzeugte Sigma-Algebra $\mathcal{A}_v$ heißt* die Vervollständigung von $\mathcal{A}$*. Es ist nicht offensichtlich, soll aber jetzt gezeigt werden, dass $\mathcal{A}_v$ vollständig ist.*

Lemma 1.8.2 *Genau dann ist $A \subset \mathcal{A}_v$, wenn eine der beiden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:*

(a) *Es gibt ein $B \in \mathcal{A}$ und eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass $A = B \cup Z$ ist, für ein $Z \subset N$.*

(b) *Es gibt ein $B \in \mathcal{A}$ und eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass $A = (B \cup Z_1) \setminus Z_2$ ist, für $Z_1, Z_2 \subset N$.*

Beweis: Klar ist, dass aus (a) die Aussage (b) folgt, denn wir können $Z_1 = Z$ und $Z_2 = \emptyset$ setzen. Wenn umgekehrt (b) erfüllt ist, dann folgt

$$A = \big(B \cup Z_2^c\big) \cup \big(Z_1 \setminus Z_2\big) = \big(B \setminus N\big) \cup \big(B \cap (N \setminus Z_2)\big) \cup \big(Z_1 \setminus Z_2\big) = C \cup Z \,,$$

mit $C = B \setminus N \in \mathcal{A}$ und $Z \subset N$. Also gilt (a). Sei jetzt $\mathcal{A}'$ die Familie aller Mengen A, welche (a) erfüllen. Nach Definition von $\mathcal{A}_v$ folgt $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_v$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}'$ eine Sigma-Algebra ist, und wenn dies so ist, dann muss $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_v$ sein, da $\mathcal{A}_v$ die kleinste Sigma-Algebra ist, welche alle Mengen der Form (a) enthält. Offenbar erfüllt $\mathcal{A}'$ das Axiom (A1), denn wir können ja $A = \Omega$ und $Z = \emptyset$ wählen. Wenn ein A die Eigenschaft (a) hat (also in $\mathcal{A}'$ liegt), dann ist $A^c = B^c \cap Z^c = B^c \setminus Z$ und erfüllt somit (b) für B^c an Stelle von B und $Z_1 = \emptyset$, $Z_2 = Z$. Da (b) und (a) äquivalent sind, folgt $A^c \in \mathcal{A}'$. Seien jetzt $A_n \in \mathcal{A}'$, also $A_n = B_n \cup Z_n$, mit $B_n \in \mathcal{A}$, $Z_n \subset N_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(N_n) = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B \cup Z \,, \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \,, \quad Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n := N \,.$$

Weil $\mu(N) \leq \sum_n \mu(N_n) = 0$ ist, folgt $A \in \mathcal{A}'$. Das war zu zeigen. □

Aufgabe 1.8.3 (Vollständigkeit von $\mathcal{A}_v$) *Benutze das letzte Lemma, um die Vollständigkeit von $\mathcal{A}_v$ zu zeigen.*

Aufgabe 1.8.4 (Wohldefiniertheit der Maßfortsetzung) *Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_v$, also von der Form $A_j = B_j \cup Z_j$, $Z_j \subset N_j$, mit $B_j \in \mathcal{A}$ und Nullmengen $N_j \in \mathcal{A}$. Gib ein Beispiel dafür, dass $A_1 = A_2$ gelten kann, obwohl $B_1 \neq B_2$ ist. Zeige aber: Wenn $A_1 = A_2$ ist, dann folgt $\mu(B_1) = \mu(B_2)$.*

Aufgabe 1.8.5 (Fortsetzung des Maßes auf $\mathcal{A}_v$) *Sei $A \in \mathcal{A}_v$, also von der Form $A = B \cup Z$, $Z \subset N$, mit $B \in \mathcal{A}$ und einer Nullmenge $N \in \mathcal{A}$. Wegen der vorangegangenen Aufgabe können wir definieren $\mu_v(A) = \mu(B)$. Zeige dass dadurch ein Maß auf $\mathcal{A}_v$ gegeben ist, und dass für $A \in \mathcal{A}$ folgt $\mu_v(A) = \mu(A)$. Also ist μ_v* die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}_v$. *Zeige weiter, dass es nur eine solche Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}_v$ gibt.*

Da wir im Allgemeinen auf Ω zwei unterschiedliche Sigma-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_v$ haben, stellt sich die Frage, inwieweit sich die Begriffe der $\mathcal{A}$- bzw. $\mathcal{A}_v$-Messbarkeit von Funktionen unterscheiden. Dazu zeigen wir das folgende Resultat:

Proposition 1.8.6

(a) *Zu jedem $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}_v)$ gibt es ein $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ so, dass $f(\omega) = g(\omega)$ μ*–f. ü.

(b) *Ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$, und ist $g(\omega) = f(\omega)$ μ*–f. ü.*, so folgt $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}_v)$.*

Beweis: Zu (a): Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $A_q = \{f(\omega) > q\}$. Wegen der $\mathcal{A}_v$-Messbarkeit von f ist diese Menge in $\mathcal{A}_v$, und daher gibt es ein $B_q \in \mathcal{A}$ und eine Nullmenge $N_q \in \mathcal{A}$ mit $A_q = B_q \cup Z_q$, wobei $Z_q \subset N_q$ ist. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, folgt dass die Vereinigung aller N_q eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ ist. Wenn wir $g(\omega) = f(\omega)$ für $\omega \notin N$ bzw. $g(\omega) = 0$ für $\omega \in N$ setzen, gilt für $q < 0$:

$$\{g(\omega) > q\} \;=\; A_q \cup N \;=\; B_q \cup N \;\in\; \mathcal{A}\,,$$

während für $q \geq 0$ folgt

$$\{g(\omega) > q\} \;=\; A_q \setminus N \;=\; B_q \setminus N \;\in\; \mathcal{A}\,.$$

Wegen Aufgabe 1.3.5 folgt $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Zu (b): Sei $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge, sodass $f(\omega) = g(\omega)$ für alle $\omega \notin N$ ist. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{g(\omega) > \alpha\} \;=\; \big(\{f(\omega) > \alpha\} \setminus N\big) \cup Z_\alpha\,,$$

mit einer Teilmenge $Z_\alpha \subset N$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 1.8.7 (Lebesgue-Sigma-Algebra und Lebesguemaß) *Die Vervollständigung der Borel-Sigma-Algebra $\mathcal{B}$ heißt die* Lebesgue-Sigma-Algebra *auf $\mathbb{R}^d$ und soll im Folgenden mit $\mathcal{L}$ bezeichnet sein. Der Einfachheit halber wird die Fortsetzung des Lebesguemaßes λ ebenfalls mit dem Buchstaben λ bezeichnet und ebenfalls Lebesguemaß genannt.*

Kapitel 2

Das Lebesgue-Integral

Wir wollen jetzt schrittweise definieren, was wir unter dem Symbol $\int_A f\,d\mu$ verstehen. In jedem Fall ist $\int_A f\,d\mu$ eine reelle Zahl oder $\pm\infty$, und wir nennen sie *Integral von f über die Menge A*. Wenn $A = \Omega$ ist, schreiben wir oft auch kurz nur $\int f\,d\mu$ – beachte aber, dass wir in dieser Vorlesung immer bestimmte Integrale betrachten, sodass $\int f\,d\mu$ niemals eine Stammfunktion von f bezeichnet. Es ist auch allgemein garnicht möglich, für eine beliebige Grundmenge Ω die Ableitung einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zu definieren, da nicht klar ist, was in diesem Fall ein Differenzenquotient bzw. sein Grenzwert bedeuten soll.

2.1 Das Integral nicht negativer Funktionen

Definition 2.1.1 *Für eine einfache Funktion $\phi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, die dann per Definition* nicht ∞ *als Wert annimmt, definieren wir das* Integral von ϕ über Ω *als*

$$\int_\Omega \phi\ d\mu \ := \ \sum_{j=1}^n c_j\ \mu(A_j)\,,$$

wobei die nicht-negativen Zahlen c_j und die Mengen A_j wie in der Standarddarstellung (1.5.2) *gewählt sind. Im Falle dass eine der Zahlen $\mu(A_j)$ gleich ∞ ist, ist natürlich auch das Integral unendlich. Beachte, dass in unserer Definition der Standarddarstellung alle c_j echt positiv sind, während z. B. im Buch von* H. Bauer [3] *auch ein $c_j = 0$ auftreten kann. In diesem Fall ist ggf. die Konvention $0\,\infty = 0$ zu beachten, und daher kann ein solcher Term immer weggelassen werden.*

Für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jede einfache Funktion $\phi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ ist offenbar $\chi_A\,\phi$ wieder eine einfache Funktion in $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$; dies wird im nächsten Lemma verwendet.

Lemma 2.1.2 *Für einfache Funktionen $\phi, \psi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ und eine Konstante $c \geq 0$ gilt immer, dass $\phi + \psi$ und $c\,\phi$ ebenfalls einfache Funktionen in $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ sind, und*

$$\int_\Omega (\phi + \psi)\,d\mu \ = \ \int_\Omega \phi\,d\mu \ + \ \int_\Omega \psi\,d\mu\,, \qquad \int_\Omega (c\,\phi)\,d\mu \ = \ c\ \int_\Omega \phi\,d\mu\,.$$

Weiter ist die Abbildung $\mu_\phi \ : \ \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, gegeben durch

$$\mu_\phi(A) \ = \ \int_\Omega \ \phi\,\chi_A\ d\mu \qquad \forall\ A \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Beweis: Seien $\phi = \sum_{j=1}^n a_j\, \chi_{A_j}$ bzw. $\psi = \sum_{k=1}^m b_k\, \chi_{B_k}$ die Standarddarstellungen von ϕ bzw. ψ, und seien noch $A_0 = \{\omega : \phi(\omega) = 0\}$, $B_0 = \{\omega : \psi(\omega) = 0\}$. Dann folgt

$$\Omega \;=\; \bigcup_{j=0}^n A_j = \bigcup_{k=0}^m B_k\,, \qquad \phi \;=\; \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^m \chi_{A_j \cap B_k}\,, \qquad \psi \;=\; \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m b_k\, \chi_{A_j \cap B_k}\,.$$

Mit der Integraldefinition und der Sigma-Additivität von μ folgt weiter

$$\int_\Omega \phi\, d\mu \;=\; \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^m \mu(A_j \cap B_k)\,, \qquad \int_\Omega \psi\, d\mu \;=\; \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m b_k\, \mu(A_j \cap B_k)\,.$$

Wenn $c_1, \ldots, c_p$ die von Null verschiedenen Elemente der Menge $\{a_j + b_k\}$ sind, und wenn wir

$$C_\nu \;=\; \bigcup_{a_j + b_k = c_\nu} (A_j \cap B_k) \qquad \nu \;=\; 1, \ldots, p$$

setzen, dann ist

$$\phi \;+\; \psi \;=\; \sum_{\nu=1}^p c_\nu\, \chi_{C_\nu}\,,$$

und dies ist die Standarddarstellung der Summe. Daher gilt

$$\int_\Omega (\phi \;+\; \psi)\, d\mu \;=\; \sum_{\nu=1}^p c_\nu\, \mu(C_\nu) \;=\; \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m (a_j \;+\; b_k)\, \mu(A_j \cap B_k) \;=\; \int_\Omega \phi\, d\mu \;+\; \int_\Omega \psi\, d\mu\,.$$

Die zweite Regel ist offenbar richtig, so dass nur noch die Maßeigenschaften von μ_ϕ zu zeigen sind. Dass die Axiome (M1) und (M2) erfüllt sind, ist klar nach der Definition. Für den Nachweis der Sigma-Additivität betrachten wir paarweise disjunkte Mengen $E_m \in \mathcal{A}$, mit $m \in \mathbb{N}$, und setzen $E = \cup_{m=1}^\infty E_m$. Dann folgt mit Hilfe von Aufgabe 1.5.2 und der Sigma–Additivität von μ, dass

$$\int_\Omega \phi\, \chi_E \;d\mu = \sum_{j=1}^n a_j\, \mu(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{m=1}^\infty \mu(E_m \cap A_j) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_j\, \mu(E_m \cap A_j) = \sum_{m=1}^\infty \int_\Omega \phi\, \chi_{E_m}\, d\mu\,.$$

Das war zu zeigen! □

Bemerkung 2.1.3 *Aus den obigen Rechenregeln folgt sofort: Sind $\phi, \psi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ einfach, und gilt $\phi \le \psi$, d. h., $\phi(\omega) \le \psi(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist $\int \phi\, d\mu \le \int \psi\, d\mu$, weil nämlich $\eta = \psi - \phi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ ist, und daher ist $\int \eta\, d\mu \ge 0$, und*

$$\int \psi\, d\mu \;=\; \int \phi\, d\mu \;+\; \int \eta\, d\mu\,.$$

Dies rechtfertigt die nun folgende Definition von Integralen beliebiger Funktionen $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition 2.1.4 *Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ sei $\int f\, d\mu = \sup\; \int \phi\, d\mu$, wobei das Supremum über alle einfachen Funktionen $\phi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\phi \le f$ erstreckt wird. Der Wert $\int f\, d\mu$, welcher auch ∞ sein kann, heißt* das Integral von f über Ω bezüglich des Maßes μ. *Für irgendeine Menge $A \in \mathcal{A}$ ist offenbar $f\chi_A \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, und wir definieren*

$$\int_A f\, d\mu \;=\; \int f\, \chi_A\, d\mu$$

als das Integral von f über A bezüglich des Maßes μ, *oder kürzer als* das Integral von f über A. *Beachte, dass aus der vorangegangenen Bemerkung geschlossen werden kann, dass im Falle einer einfachen Funktion f die hier gegebene Definition des Integral gleich der vorangegangenen ist. Vergleiche zur Motivation dieser Definition auch* Lemma 1.5.3 *und den noch folgenden Satz über die monotone Konvergenz.*

Bemerkung 2.1.5 *Die folgenden Eigenschaften des Integrals ergeben sich unmittelbar aus der Definition:*

(a) *Aus $f, g \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \leq g$ folgt $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.*

(b) *Aus $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B$ folgt $\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$.*

Wir sagen auch, dass das Integral sowohl im Integranden als auch im Integrationsbereich monoton ist.

Aufgabe 2.1.6 (Integrale als Reihen) *Seien $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, und μ das Zählmaß. Eine Funktion f auf $\mathbb{N}$ ist also eigentlich eine Zahlenfolge (f_j). Zeige: Das Integral von f über $\mathbb{N}$, wobei hier $f \geq 0$ sein soll, ist in diesem Fall genau gleich dem Wert der unendlichen Reihe $\sum_j f_j$.*

2.2 Der Satz von Beppo-Levi und das Fatousche Lemma

Der folgende Satz ist einer von zwei zentralen Sätzen zur Vertauschung von Grenzwert und Integral. Dabei ist wichtig zu beachten, dass er nur bei sogenannter monotoner Konvergenz anwendbar ist, und dass der Grenzwert der Integrale auch unendlich sein kann!

Satz 2.2.1 (Satz von Beppo-Levi über monotone Konvergenz) *Gegeben sei eine Folge (f_n) von Funktionen aus $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, sodass für alle $\omega \in \Omega$ die Wertefolge $(f_n(\omega))$ monoton wächst. Dann ist die Grenzfunktion f, definiert durch $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$, in $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, und es gilt*

$$\int f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu\,.$$

Beweis: Nach Lemma 1.3.6 ist die Grenzfunktion f messbar, also in $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \leq f$, folgt auch $\int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu$. Sei jetzt $0 < \alpha < 1$, und sei $\phi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ eine einfache Funktion mit $\phi \leq f$, sowie

$$A_n \;=\; \{\; f_n(\omega) \geq \alpha\,\phi(\omega)\;\} \;=\; \{\; f_n(\omega) - \alpha\,\phi(\omega) \geq 0\;\} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Nach Definition der Messbarkeit sind alle $A_n \in \mathcal{A}$, und wegen der Monotonie der $(f_n(\omega))$ folgt $A_n \subset A_{n+1}$. Aus der Konvergenz gegen $f(\omega)$ folgt weiter $\Omega = \cup_n A_n$. Schließlich folgt

$$\mu_{\alpha\phi}(A_n) \;:=\; \int_{A_n} \alpha\,\phi\,d\mu \;\leq\; \int_{A_n} f_n\,d\mu \;\leq\; \int_\Omega f_n\,d\mu \;\leq\; \int f\,d\mu\,.$$

Wegen Lemma 2.1.2 ist $\mu_{\alpha\phi}$ ein Maß auf $\mathcal{A}$, und daher folgt mit Lemma 1.6.8

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \alpha\,\phi\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha\phi}(A_n) \;=\; \mu_{\alpha\phi}(\Omega) \;=\; \int_\Omega \alpha\,\phi\,d\mu\,.$$

Die Folge der Integrale der f_n wächst monoton und daher existiert ihr Grenzwert, ist aber evtl. gleich ∞. Daher folgt

$$\int_\Omega \alpha\,\phi\,d\mu \;=\; \alpha \int_\Omega \phi\,d\mu \;\leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu \;=:\; I\,.$$

Lässt man jetzt $\alpha \to 1-$ konvergieren, so folgt $\int \phi\,d\mu \leq I$, und da ϕ eine beliebige einfache Funktion mit $\phi \leq f$ ist, folgt nach der Integraldefinition, dass $\int f\,d\mu \leq I$ sein muss. Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 2.2.2 *In* Aufgabe 2.1.6 *wurde klar, dass unendliche Reihen mit positiven Gliedern als Integrale auf einem speziellen Maßraum aufgefasst werden können. Formuliere den Satz von Beppo-Levi für diesen Maßraum als einen Satz über unendliche Reihen.*

Der Satz von Beppo–Levi hat die folgenden wichtigen Konsequenzen:

Korollar 1 zu Satz 2.2.1 *Für $f, g \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ und $c \geq 0$ sind $c\,f, f+g \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, und es gilt*

$$\int c\,f\,d\mu \;=\; c\int f\,d\mu\,, \qquad \int (f+g)\,d\mu \;=\; \int f\,d\mu \;+\; \int g\,d\mu\,.$$

Beweis: Nach Lemma 1.5.3 gibt es monoton wachsende Folgen (ϕ_n) und (ψ_n) von einfachen Funktionen, welche gegen f bzw. g konvergieren. Dann sind aber auch $(c\,\phi_n)$ und $(\phi_n+\psi_n)$ monoton wachsende Folgen einfacher Funktionen mit den Grenzwerten $c\,f$ bzw. $f+g$, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Beppo-Levi bzw. dem ersten Teil von Lemma 2.1.2. □

Korollar 2 zu Satz 2.2.1 *Für jedes feste $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ ist $\mu_f : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, definiert durch*

$$\mu_f(A) \;=\; \int_A f\,d\mu \qquad \forall\; A \in \mathcal{A}\,,$$

ein Maß auf der Sigma-Algebra $\mathcal{A}$, und es gilt

$$\mu_f(A) \;=\; \int_A f\,d\mu \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\omega) \;=\; 0 \quad \mu\text{–f. ü. } \textit{auf } A\,.$$

Beweis: Die Axiome (M1) und (M2) sind offensichtlich erfüllt. Für den Nachweis der Sigma-Additivität seien $A_k \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, und seien $f_n := \sum_{k\leq n} f\chi_{A_k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (f_n) strebt monoton wachsend gegen $f\chi_A$, mit $A := \cup A_k$, und deshalb folgt mit Satz 2.2.1 dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_f(A_k) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f\,\chi_{A_k}\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \;=\; \int_A f\,d\mu \;=\; \mu_f(A)$$

ist. Sei jetzt $A \in \mathcal{A}$ beliebig gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{f(\omega)\,\chi_A \geq 1/n\}$, dann folgt $A_n \subset A$ und $\mu_f(A) = \int f\,\chi_A\,d\mu \geq \mu(A_n)/n$. Falls $\mu_f(A) = 0$ ist, folgt also $\mu(A_n) = 0$, und daher ist $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$. Also gilt $f(\omega) = 0$ μ–f. ü.auf A. Für den Beweis der Rückrichtung sei jetzt $f(\omega) = 0$ μ–f. ü.auf A vorausgesetzt. Wenn $\phi \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ eine einfache Funktion mit $\phi \leq f$ ist, dann folgt auch $\phi(\omega) = 0$ μ–f. ü.auf A. In der Standarddarstellung (1.5.2) von ϕ müssen also alle A_j so sein, dass $\mu(A_j \cap A) = 0$ ist. Daraus folgt aber $\int_A \phi\,d\mu = 0$, und daher ist nach Definition des Integrales klar, dass $\int_A f\,d\mu = \mu_f(A) = 0$ sein muss. □

Korollar 3 zu Satz 2.2.1 *Gegeben sei eine Folge (f_n) von Funktionen aus $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, sodass für alle $\omega \in \Omega$ die Wertefolge $(f_n(\omega))$ monoton wächst. Sei weiter $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ so, dass $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$* μ–f. ü.*gilt. Dann folgt*

$$\int f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu\,.$$

Beweis: Sei $\tilde{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ *für alle* $\omega \in \Omega$. Dann ist $f(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ μ–f. ü., und daher folgt aus Korollar 2.2 dass $\int f\,d\mu = \int \tilde{f}\,d\mu$ ist. Mit dem Satz von Beppo–Levi folgt dann die Behauptung. □

Korollar 4 zu Satz 2.2.1 *Für jede Folge (g_k) von Funktionen aus $\mathcal{M}^+(\Omega,\mathcal{A})$ gilt immer*

$$\int \Big(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Big)\, d\mu \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int g_k \, d\mu \Big)\,.$$

Beweis: Wende den Satz von Beppo–Levi auf die Folge der Partialsummen $f_n := \sum_1^n g_k$ an! □

Aufgabe 2.2.3 *Leite aus dem letzten Korollar einen Satz für Doppelreihen ab.*

Auch der nächste Satz ist eine Konsequenz des Satzes von Beppo–Levi:

Satz 2.2.4 (Lemma von Fatou) *Für jede Folge (f_n) von Funktionen aus $\mathcal{M}^+(\Omega,\mathcal{A})$ gilt immer*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu\,.$$

Beweis: Seien $g_m \in \mathcal{M}^+(\Omega,\mathcal{A})$ definiert durch

$$g_m(\omega) \;=\; \inf_{n\ge m} f_n(\omega) \qquad \forall\, \omega\in\Omega \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,.$$

Wegen Lemma 1.3.6 folgt, dass alle g_m in der Tat in $\mathcal{M}^+(\Omega,\mathcal{A})$ sind, und es gilt $\int g_m\,d\mu \le \int f_n\,d\mu$ für alle $n \ge m$, also insbesondere ist $\int g_m\,d\mu \le \liminf \int f_n\,d\mu$. Für jedes $\omega\in\Omega$ ist die Folge $(g_m(\omega))$ monoton wachsend und strebt nach Aufgabe 1.3.4 gegen $f(\omega) := \liminf f_n(\omega)$. Daher folgt die Behauptung aus dem Satz von Beppo–Levi. □

2.3 Das Integral beliebiger messbarer Funktionen

Definition 2.3.1 *Eine Funktion $f\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{A})$ heißt* integrierbar (über Ω)*, falls f^+ und f^-, definiert in* Definition 1.2.9*, beide ein* endliches *Integral haben, also falls $\int f^\pm\,d\mu < \infty$ sind. In diesem Fall setzen wir*

$$\int f\,d\mu \;=\; \int f^+\,d\mu \;-\; \int f^-\,d\mu\,.$$

Falls für $A\in\mathcal{A}$ die Funktion $f\,\chi_A$ integrierbar ist, nennen wir f über A integrierbar *und setzen*

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \int f\,\chi_A\,d\mu \;=\; \int_A f^+\,d\mu \;-\; \int_A f^-\,d\mu\,.$$

Mit $\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ bezeichnen wir die Menge aller über Ω integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{A})$, welche nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen, d. h., welche nicht $\pm\infty$ als Werte haben. Beachte, dass der Buchstabe $\mathcal{L}$ hier nichts mit der Lebesgue-Sigma-Algebra in $\mathbb{R}^n$ zu tun hat. Vergleiche die folgende Bemerkung um zu sehen, dass die letzte Eigenschaft in gewissem Sinne keine Einschränkung bedeutet; sie ist aber notwendig um sicherzustellen, dass die Menge $\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Vektorraum ist.

Bemerkung 2.3.2 *Ist $f\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{A})$ integrierbar, so folgt dass $N_1 = \{f(\omega)=\infty\}$ und $N_2 = \{f(\omega) = -\infty\}$ zwei Nullmengen sind. Daher können wir f auf $N_1\cup N_2$ neu definieren, ohne das Integral von f zu verändern, und dadurch erreichen, dass alle Werte von f reelle Zahlen sind.*

Aufgabe 2.3.3 (Majorantenkriterium) *Zeige: Wenn f messbar und $g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist, und wenn $|f(\omega)| \leq g(\omega)$ ist für alle $\omega \in \Omega$, dann folgt $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Das bedeutet, dass für die Integrierbarkeit ein* Majorantenkriterium *gilt.*

Aufgabe 2.3.4 *Betrachte den speziellen Maßraum aus* Aufgabe 2.1.6. *In diesem entsprechen Integrale offenbar unendlichen Reihen. Finde heraus, in welchem Sinn eine Reihe konvergieren muss, damit sie einer integrierbaren Funktion in diesem Raum entspricht.*

Lemma 2.3.5 *Für jedes feste $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist die Abbildung $\mu_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$\mu_f(A) \;=\; \int_A f\, d\mu \qquad \forall\; A \in \mathcal{A}\,,$$

eine sigma-additive Mengenfunktion; d. h. für alle Folgen von paarweise disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ gilt für $A := \cup_n A_n$

$$\mu_f\,(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\; \mu_f(A_n)\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \int_A f\, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu\,,$$

wobei die rechts stehenden Reihen absolut konvergieren.

Beweis: Aus der Definition des Integrals folgt $\mu_f = \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$, und nach Korollar 2 zu Satz 2.2.1 sind $\mu_{f^\pm}$ zwei Maße und insbesondere Sigma–additiv. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt, da die Vereinigung der A_n nicht von der Numerierung der Mengen abhängt und somit die Reihe unbedingt konvergent ist, was nach Analysis I zur absoluten Konvergenz äquivalent ist. □

Proposition 2.3.6 *Genau dann ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wenn $|f| \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist, und in diesem Fall gilt*

$$\Big|\int f\, d\mu\Big| \;\leq\; \int |f|\, d\mu\,.$$

Beweis: Nach Definition ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ genau dann, wenn $f^+, f^- \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A})$ sind, und dann folgt $|f| \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aus dem Korollar 1 zu Satz 2.2.1. Umgekehrt folgt aus $|f| \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit Bemerkung 2.1.5 dass $f^+, f^- \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind. Aus der Definition des Integrals von f und der Dreiecksungleichung folgt der Rest der Behauptung. □

Aufgabe 2.3.7 *Zeige dass $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ unter den üblichen Verknüpfungen von Funktionen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, und dass das Integral ein lineares Funktional auf $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ im Sinn der linearen Algebra ist.*

Aufgabe 2.3.8 *Zeige dass jede messbare Funktion f über jede Nullmenge N integrierbar ist, und dass immer $\int_N f\, d\mu = 0$ gilt.*

Definition 2.3.9 *Analog zur Messbarkeit nennen wir eine μ–*f. ü. *auf Ω definierte Funktion f* integrierbar *auf Ω, falls es möglich ist, $f(\omega)$ für ω aus einer Nullmenge so zu definieren, dass die fortgesetzte Funktion integrierbar ist.*

Aufgabe 2.3.10 (Integrierbarkeit f. ü. definierter Funktionen) *Sei die Funktion f auf Ω μ–*f. ü. *definiert. Nach Definition gibt es dann eine Nullmenge $N \subset \Omega$, so dass f auf N^c definiert ist. Zeige:*

(a) *Wenn f integrierbar ist, wenn also $f(\omega)$ für $\omega \in N$ so definiert werden kann, dass die fortgesetzte Funktion integrierbar ist, dann kann man o. B. d. A. setzen $f(\omega) = 0$ für $\omega \in N$, und das Integral ist von der Wahl der Fortsetzung unabhängig.*

(b) *Wenn es eine Teilmenge $B \subset N$ gibt, welche nicht messbar ist, dann gibt es eine Fortsetzung von f, welche nicht messbar und damit auch nicht integrierbar ist.*

(c) *Die Definition der Integrierbarkeit und das Integral einer μ–*f. ü. *definierten Funktion hängen nicht von der Wahl der Nullmenge N ab.*

2.4 Der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz

Satz 2.4.1 (Lebesguescher Satz über dominierte Konvergenz) *Seien $f_n, f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$, und gelte*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; f(\omega) \qquad \mu\text{–f. ü.}$$

Falls zusätzlich ein $g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ existiert mit $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in \Omega$, dann folgt $f_n, f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, und es gilt

$$\int f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu\,.$$

Beweis: Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die Folge $(f_n(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$ gegen $f(\omega)$ konvergiert; andernfalls kann man die Funktionen auf einer (von n unabhängigen) Nullmenge N abändern. Dann ist auch $|f(\omega)| \le g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, und aus Aufgabe 2.3.3 folgt $f_n, f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Setzt man jetzt $g_n^{\pm} = g \pm f_n$, so folgt $g_n^{\pm} \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$. Mit dem Fatouschen Lemma folgt

$$\int g\,d\mu \;\pm\; \int f\,d\mu \;=\; \int \lim_{n\to\infty} g_n^{\pm}\,d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int g_n^{\pm}\,d\mu \;=\; \int g\,d\mu \;+\; \liminf_{n\to\infty} \big(\pm \int f_n\,d\mu\big)\,.$$

Dies impliziert aber wegen $\liminf(-\int f_n\,d\mu) = -\limsup \int f_n\,d\mu$ die Ungleichungskette

$$\int f\,d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \;\le\; \int f\,d\mu\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Der Lebesguesche Satz hat die folgenden wichtigen Anwendungen:

Lemma 2.4.2 (Stetigkeit von Parameterintegralen) *Sei $I \subset \mathbb{R}^d$ ein beliebiges Intervall, sei $x_0 \in I$, und sei $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $x \in I$ ist $f(x, \cdot)$ integrierbar über Ω.*

(b) *Für alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega)$ stetig in x_0.*

(c) *Es gibt eine über Ω integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $|f(x, \omega)| \le g(\omega)$ für alle $(x, \omega) \in I \times \Omega$.*

Dann ist die durch das Parameterintegral

$$h(x) \;:=\; \int_\Omega f(x, \cdot)\,d\mu \qquad \forall\; x \in I$$

definierte Funktion stetig in x_o.

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in I, welche gegen x_0 konvergiert. Durch Anwendung des Lebesgueschen Satzes auf $f_n := f(x_n, \cdot)$ folgt dass $h(x_n)$ gegen $h(x_0)$ strebt, wenn $n \to \infty$ geht. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 2.4.3 (Differentiation von Parameterintegralen) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $x_0 \in I$, und sei $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $x \in I$ ist $f(x, \cdot)$ integrierbar über Ω.*

(b) *Für alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega)$ differenzierbar auf I.*

(c) *Es gibt eine über Ω integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $|f_x(x, \omega)| \le g(\omega)$ für alle $(x, \omega) \in I \times \Omega$. Dabei ist f_x die partielle Ableitung von f nach x.*

Dann ist die durch das Parameterintegral

$$h(x) \;:=\; \int_\Omega f(x, \cdot)\, d\mu \qquad \forall\, x \in I$$

definierte Funktion auf I differenzierbar, und es gilt

$$h'(x) \;:=\; \int_\Omega f_x(x, \cdot)\, d\mu \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Beweis: Sei $x_0 \in I$, und sei (x_n) eine Folge in I, welche gegen x_0 konvergiert, wobei alle $x_n \ne x_0$ seien. Dann ist die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n(\omega) \;:=\; \frac{f(x_n, \omega) - f(x_0, \omega)}{x_n - x_0} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \Omega$$

integrierbar und punktweise konvergent gegen $f_x(x_0, \omega)$. Mit dem Mittelwertsatz folgt für jedes feste $\omega \in \Omega$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines ξ (abhängig von ω und n), so dass $f_n(\omega) = f_x(\xi, \omega)$ ist. Nach Voraussetzung folgt hieraus $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, und durch Anwendung des Satzes von Lebesgue folgt die Behauptung. □

2.5 Integration bezüglich eines Bildmaßes

Satz 2.5.1 *Mit den Bezeichnungen wie in* Definition 1.6.12 *gilt: Wenn $f \in \mathcal{L}(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_T)$ ist, dann ist $f \circ T \in \mathcal{L}(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$, und*

$$\int_{\Omega_2} f\, d\mu_T \;=\; \int_{\Omega_1} f \circ T\, d\mu\,.$$

Beweis: Sei zunächst eine einfache Funktion ϕ in der Standarddarstellung (1.5.2) betrachtet. Dann ist $\phi \circ T$ wiederum einfach und hat die Standarddarstellung $\sum_j c_j\, \chi_{B_j}$, mit $B_j = T^{-1}(A_j)$. Nach Definition von μ_T folgt $\mu(B_j) = \mu_T(A_j)$, und daher gilt die Behauptung des Satzes für $f = \phi$. Wenn jetzt f eine nicht-negative Funktion ist, dann gilt das gleiche auch für $f \circ T$, und nach Definition sind beide Integrale gleich dem Supremum der Integrale einfacher Funktionen, welche punktweise unterhalb von f bzw. $f \circ T$ liegen. Nach dem bereits bewiesenen folgt daher die Behauptung für ein solches f. Wenn jetzt $f = f^+ - f^-$ integrierbar ist, dann ist $f \circ T = f^+ \circ T - f^- \circ T$, und hieraus folgt mit der Integraldefinition dass die Behauptung auch für ein allgemeines f gilt. □

Definition 2.5.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ heißt dann auch* Zufallsvariable auf Ω. *Falls f integrierbar ist, dann heißt $\int_\Omega f\, d\mu$ der* Erwartungswert *von f.*

Korollar zu Satz 2.5.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ eine integrierbare Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F, sowie λ_F das durch F definierte Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \, d\mu \;=\; \int_\mathbb{R} id \; d\lambda_F \,,$$

wobei id die identische Abbildung auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Beweis: Nach Aufgabe 1.6.15 ist λ_F gleich dem Bildmaß der Funktion f, und deshalb folgt die Behauptung, wenn man im Satz 2.5.1 T durch f bzw. f durch id ersetzt. □

Bemerkung 2.5.3 *In Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet man statt $\int_\mathbb{R} id \; d\lambda_F$ meistens die suggestivere Schreibweise*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \, dF(t) \,.$$

Es gilt auch allgemeiner für beliebiges reelles $p \ge 1$ und ein f mit $|f|^p \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ die Gleichung

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p \, dF(t) \,.$$

Zum Beweis ersetzt man in Satz 2.5.1 *die Abbildung T durch f bzw. f durch $|id|^p$.*

2.6 Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral

In diesem Abschnitt betrachten wir die Lebesgue-Sigma-Algebra und das Lebesguemaß λ in $\mathbb{R}$, und nennen das zugehörige Integral auch das *Lebesgue-Integral*. Wir wollen zeigen dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist, und dass die Integrale übereinstimmen. Dabei ist wichtig zu beachten, dass wir *keine uneigentlichen Riemann-Integrale* betrachten!

Proposition 2.6.1 *Sei $I = [a, b]$, mit $a < b$, und sei f auf I Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar auf I, und beide Integrale haben denselben Wert.*

Beweis: Zu jeder Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ von I definieren wir zwei Treppenfunktionen ϕ und ψ durch $\phi(a) = \psi(a) = f(a)$ bzw.

$$\phi(x) \;=\; m_j := \inf_{x_{j-1} \le \xi \le x_j} f(\xi)\,, \quad \psi(x) \;=\; M_j := \sup_{x_{j-1} \le \xi \le x_j} f(\xi) \quad \text{für } x_{j-1} < x \le x_j \quad (1 \le j \le N)\,.$$

Dann sind ϕ, ψ einfache Funktionen mit $\phi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in I$, und $\int_I \phi \, d\lambda$ bzw. $\int_I \psi \, d\lambda$ ist die zur Zerlegung gehörige Unter- bzw. Obersumme von f. Wenn wir eine zulässige Folge von Zerlegungen betrachten, enthalten wir zwei entsprechende Funktionenfolgen (ϕ_n) und (ψ_n), und wenn wir die Zerlegungsfolge so wählen, dass jede Zerlegung eine Verfeinerung der vorhergehenden ist, dann ist die erste Folge monoton wachsend und die zweite monoton fallend. Beide Folgen konvergieren somit auf I gegen messbare Funktionen f_1 bzw. f_1, und es folgt $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ für alle $x \in I$. Da $|\phi_n(x)|, |\psi_n(x)| \le K := \sup_{\xi \in I} |f(\xi)|$ ist, für alle $\xi \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus dem Satz von Lebesgue die Integrierbarkeit von f_1, f_2, und

$$\int_I f_1 \, d\lambda \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n \, d\lambda \,, \qquad \int_I f_2 \, d\lambda \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_I \psi_n \, d\lambda \,.$$

Nach der Theorie des Riemann-Integrals müssen die entsprechenden Folgen von Unter- und Obersummen aber beide gegen das Riemann-Integral von f konvergieren. Das heißt, dass die Lebesgue-Integrale von

f_1 und f_2 gleich sind, oder anders ausgedrückt, dass das Integral von $f_2 - f_1$ verschwindet. Da $f_2 - f_1$ aber nicht negativ ist, folgt $f_2(x) - f_1(x) = 0$ λ–f. ü. Da aber f zwischen f_1 und f_2 liegt, gilt auch $f(x) = f_2(x) - f_1(x) = 0$ λ–f. ü., woraus die Lebesgue-Integrierbarkeit von f und die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral folgt. $\square$

Aufgabe 2.6.2 *Zeige dass die Dirichletsche Sprungfunktion*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

auf jedem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ *Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbar ist.*

Bemerkung 2.6.3 *Wenn ein uneigentliches Riemannintegral absolut konvergiert, kann man leicht zeigen, dass das entsprechende Lebesgueintegral mit dem Riemannintegral übereinstimmt. Allerdings muss das Lebesgueintegral nicht existieren, falls das uneigentliche Riemannintegral zwar konvergiert aber nicht absolut konvergiert. Dies soll hier nicht genauer untersucht werden.*

Kapitel 3

Erzeugung von Maßen

In diesem Kapitel wollen wir die Existenz des Borelmaßes auf $\mathbb{R}^d$ zeigen. Dabei müssen wir sicherstellen, dass wir aus den vorausgegangenen Kapiteln (oder den Übungen) keinerlei Resultate benutzen, deren Beweis *die Existenz des Borel- bzw. Lebesguemaßes λ vorausgesetzt haben.* Allerdings werden wir weiterhin für d-dimensionale Intervalle I die auf Seite 7 eingeführte Definition von $\lambda(I)$ benutzen.

3.1 Algebren und Prämaße

Definition 3.1.1 *Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω heißt* eine Algebra*, falls gilt:*

(F1) $\quad \emptyset \in \mathcal{F}$,

(F2) $\quad A \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{F}$,

(F3) $\quad A_j \in \mathcal{F} \quad \forall\, j = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$.

Ein anderer Begriff, den wir hier nicht verwenden wollen, ist der eines Ringes [3, S. 5]*, wobei dies aber nicht mit dem gleichnamigen Begriff aus der Vorlesung* Algebra *verwechselt werden darf. Ist $\mathcal{F}$ eine solche Algebra, dann heißt eine Abbildung $\mu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$* ein Prämaß *auf $\mathcal{F}$, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

(P1) $\quad \mu(\emptyset) = 0$.

(P2) $\quad \forall\, A \in \mathcal{F} : \quad \mu(A) \geq 0$.

(P3) Für paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, deren Vereinigung ebenfalls zu $\mathcal{F}$ gehört (was in einer Algebra nicht allgemein zu gelten braucht!), ist

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Die letzte dieser drei Eigenschaften wollen wir im Folgenden wieder als die Sigma-Additivität *von μ bezeichnen. Wenn statt des Axioms* (P3) *nur verlangt ist, dass für endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{F}$, $1 \leq n \leq m$, deren Vereinigung dann immer zu $\mathcal{F}$ gehört, gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) ,$$

dann nennt man μ einen Inhalt *und bezeichnet diese Eigenschaft auch als* Additivität. *Für Inhalte bzw. Prämaße kann man, genauso wie im Fall eines Maßes, den Begriff der Sigma-Endlichkeit definieren.*

Aufgabe 3.1.2 *Zeige dass eine Algebra $\mathcal{F}$ abgeschlossen gegenüber der Durchschnittsbildung von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{F}$ ist.*

Aufgabe 3.1.3 *Zeige dass jedes Prämaß auch ein Inhalt auf der Algebra $\mathcal{F}$ ist.*

Aufgabe 3.1.4 *Zeige dass* Lemma 1.6.6 *auch für einen Inhalt, und damit natürlich auch für ein Prämaß gilt.*

Aufgabe 3.1.5 *Zeige dass auch ein Prämaß subadditiv ist im Sinne von* Aufgabe 1.6.7, *falls man Mengen $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ betrachtet, deren Vereinigung ebenfalls zu $\mathcal{F}$ gehört.*

Für eine spätere Anwendung zeigen wir jetzt folgendes Resultat:

Lemma 3.1.6 *Sei $\mathcal{F}$ eine Algebra, und sei $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{F}$ erzeugte Sigma-Algebra. Sei weiter $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$ so, dass gilt*

$$E_n \in \mathcal{M}\,, \quad E_n \supset E_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$$

und

$$E_n \in \mathcal{M}\,, \quad E_n \subset E_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}\,.$$

Dann folgt $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$, und falls $\mathcal{M}$ die kleinste Familie mit den verlangten Eigenschaften ist, folgt sogar $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.

Beweis: Für den Beweis können wir o. B. d. A. annehmen, dass $\mathcal{M}$ kleinstmöglich ist. Dann zeigen wir:

(a) **Beh:** $\mathcal{M}$ ist eine Algebra. **Bew:** Sei $E \in \mathcal{M}$, und sei

$$\mathcal{M}(E) \;=\; \{\, F \in \mathcal{M} :\; E \setminus F, E \cap F, F \setminus E \in \mathcal{M} \,\}\,.$$

Dann folgt $\emptyset, E \in \mathcal{M}(E)$. Für $E_n \in \mathcal{M}(E)$ mit $E_n \subset E_{n+1}$ und $F = \cup E_n$ gilt dann

$$E \setminus F \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus E_n) \;\in\; \mathcal{M}\,, \quad E \cap F \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap E_n) \;\in\; \mathcal{M}\,, \quad F \setminus E \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus E) \;\in\; \mathcal{M}\,,$$

und somit folgt $F \in \mathcal{M}(E)$. Analog zeigt man, dass auch der Durchschnitt von Mengen $E_n \in \mathcal{M}(E)$ mit $E_n \supset E_{n+1}$ wieder zu $\mathcal{M}(E)$ gehört. Für ein $E \in \mathcal{F}$ folgt aber immer $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(E)$, und daher gilt wegen der Minimalitätseigenschaft von $\mathcal{M}$, dass $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E)$ ist für alle $E \in \mathcal{F}$. Außerdem ist klar dass $F \in \mathcal{M}(E)$ mit $E \in \mathcal{M}(F)$ äquivalent ist. Daraus folgt insbesondere

$$(E \in \mathcal{F}\,,\; F \in \mathcal{M}) \qquad \Longrightarrow \qquad F \in \mathcal{M}(E) \qquad E \in \mathcal{M}(F)\,,$$

und demzufolge ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(F)$ für alle $F \in \mathcal{M}$ erfüllt, woraus wiederum wegen der Minimalitätseigenschaft von $\mathcal{M}$ folgt $\mathcal{M} = \mathcal{M}(F)$ für alle $F \in \mathcal{M}$. Das bedeutet aber, dass für alle $E, F \in \mathcal{M}$ immer $E \setminus F, E \cap F, F \setminus E \in \mathcal{M}$ folgt, und daraus folgt die Algebraeigenschaft von $\mathcal{M}$.

(b) **Beh:** $\mathcal{M}$ ist eine Sigma-Algebra. **Bew:** Wenn $F_n \in \mathcal{M}$ sind, dann gilt für $E_n = \cup_1^n F_k$ dass alle $E_n \in \mathcal{M}$ sind, und dass $E_n \subset E_{n+1}$ ist, woraus folgt dass die Vereinigung der E_n zu $\mathcal{M}$gehört; diese ist aber gleich der Vereinigung der F_n.

Also ist $\mathcal{M}$ eine Sigma-Algebra, welche $\mathcal{F}$ umfasst, und daher folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, weil $\mathcal{A}$ per Definition die kleinste derartige Sigma-Algebra ist. Wegen der Minimalität von $\mathcal{M}$ folgt aber dann die Gleichheit. □

Beispiel 3.1.7 (Halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$) *Als das wichtigste Beispiel einer Algebra bzw. eines Prämaßes betrachten wir die Menge $\mathcal{F}_1$ aller Vereinigungen von endlich vielen halboffenen Intervalle $[a, b)$, mit $a \le b$, wobei $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ zugelassen sind. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Intervalle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sein sollen, sodass $[-\infty, b)$ gleich der Menge $\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$ ist. Ist $A = \cup_1^n [a_j, b_j) \neq \emptyset$, so können wir o. B. d. A. voraussetzen dass $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$ und $b_j < a_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$ ist. Dann sind die Zahlen a_j, b_j durch A eindeutig bestimmt, und wir können definieren*

$$\lambda(\emptyset) \;=\; 0\,, \qquad \lambda(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)\,.$$

Dass $\mathcal{F}_1$ eine Algebra und λ ein Prämaß ist, wird im nächsten Lemma gezeigt. Es ist anschaulich klar, dass wir in $\mathbb{R}^d$ mit Hilfe von kartesischen Produkten halboffener Intervalle eine analoge Algebra $\mathcal{F}_d$ und ein entsprechendes Prämaß einführen können, was wir aber jetzt nicht tun wollen, da wir später im Rahmen der Theorie der Produktmaße hierauf zurückkommen werden.

Aufgabe 3.1.8 *Seien $I_0, \ldots, I_n$ beliebige Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeige: Wenn $I_1, \ldots, I_n$ paarweise disjunkt und alle in I_0 enthalten sind, dann folgt $\lambda(I_0) \ge \sum_{k=1}^n \lambda(I_k)$. Wenn dagegen $I_0 \subset \cup_1^n I_k$ ist, folgt $\lambda(I_0) \le \sum_{k=1}^n \lambda(I_k)$.*

Lemma 3.1.9 *Die oben definierte Menge $\mathcal{F}_1$ ist eine Algebra, und λ ist ein Prämaß auf $\mathcal{F}_1$.*

Beweis: Klar ist, dass $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{F}_1$ sind, und dass $\mathcal{F}_1$ abgeschlossen gegenüber der Vereinigung von endlich vielen $A \in \mathcal{F}_1$ ist. Außerdem ist der Durchschnitt zweier halboffener Intervalle leer oder selbst ein solches Intervall, und mit Induktion folgt dann dass $\mathcal{F}_1$ auch gegenüber Durchschnittsbildung von endlich vielen $A \in \mathcal{F}_1$ abgeschlossen ist. Mit den de Morganschen Regeln folgt schließlich auch die Abgeschlossenheit gegenüber Komplementbildung, da das Komplement eines halboffenen Intervalls die Vereinigung höchstens zweier solcher Intervalle ist und deshalb in $\mathcal{F}_1$ liegt. Da die ersten beiden Axiome für ein Prämaß von λ offenbar erfüllt werden, ist nur noch das dritte zu zeigen. Dazu seien abzählbar viele paarweise disjunkte $A \in \mathcal{F}_1$ gegeben. Wenn wir jedes A als disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen darstellen, erhalten wir insgesamt eine abzählbare Menge solcher Intervalle, und die Summe der (nicht-negativen) Zahlen $\lambda(A)$ ist, wegen der absoluten Konvergenz bzw. bestimmten Divergenz dieser Reihe, gleich der Summe der Längen aller dieser Intervalle. Deshalb reicht es, Axiom (P3) für den Fall zu beweisen, dass jedes A_n ein nichtleeres halboffenes Intervall $[a_n, b_n)$ ist. Wenn dann A deren Vereinigung ist, so können wir $A = \cup_1^m [c_j, d_j)$ schreiben, wobei $c_j < d_j$, $j = 1, \ldots, m$ und $d_j < c_{j+1}$, $j = 1, \ldots, m-1$ ist. Jedes Intervall A_n liegt dann in einem der Intervalle $[c_j, d_j)$, und mit Hilfe des großen Umordnungssatzes aus Analysis I sieht man, dass es ausreicht, wenn wir (P3) für den Fall beweisen, dass A selber ein einziges Intervall $[c, d)$ ist. In diesem Fall sei jetzt $E_m = \cup_{n=1}^m A_n$ gesetzt. Dann ist $E_m \subset A$, woraus mit Aufgabe 3.1.8 folgt $\sum_{n=1}^m \lambda(A_n) \le \lambda(A)$ folgt. Da dies für alle m gilt, folgt sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \;\le\; \lambda(A)\,.$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$, und seien $B_n = (a_n - \varepsilon\, 2^{-n}, b_n)$. Die B_n sind eine offene Überdeckung für ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall $I \subset A$, und nach dem Satz von Heine-Borel folgt deshalb, dass für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt $I \subset \cup_{n=1}^m B_n$. Daher folgt mit derselben Aufgabe

$$\lambda(I) \;\le\; \sum_{n=1}^{n} \lambda(B_n) \;=\; \sum_{n=1}^{n} (b_n - a_n + \varepsilon\, 2^{-n}) \;\le\; \varepsilon \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, folgt dieselbe Ungleichung auch für $\varepsilon = 0$, und da I ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall von A war, folgt sogar

$$\lambda(A) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\,.$$

Das war noch zu zeigen. □

Bemerkung 3.1.10 *Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, und sei $g(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$. Dann wird durch die Festsetzung*

$$\lambda_g([a,b)) \;=\; g(b) \;-\; g(a) \qquad \forall\ a < b\,,\ a\,b \in \overline{\mathbb{R}}$$

ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ definiert, und für den Fall $g(x) \equiv x$ ist dies gleich dem oben eingeführten Lebesgueschen Prämaß; der Beweis hierfür geht ganz analog wie der von dem obigem Lemma.

3.2 Das äußere Maß

Im Rest dieses Kapitels sei immer eine Algebra $\mathcal{F}$ sowie ein Prämaß μ auf $\mathcal{F}$ gegeben.

Definition 3.2.1 (Äußeres Maß) *Für beliebige Teilmengen $B \subset \Omega$ definieren wir*

$$\mu^*(B) \;=\; \inf\left\{\ \sum_{n=1}^{\infty}\ \mu(A_n)\ :\ A_n \in \mathcal{F}\,,\quad B\ \subset\ \bigcup_{n=1}^{\infty}\ A_n\ \right\}. \tag{3.2.1}$$

Wir nennen $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ das durch μ erzeugte äußere Maß*.*

Lemma 3.2.2 (Eigenschaften des äußeren Maßes) *Das oben definierte äußere Maß μ^* hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) $\forall\ B \subset \Omega\ :\qquad \mu^*(B) \ge 0$.

(c) $A \subset B \subset \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(A)\ \le\ \mu^*(B)$.

(d) $\forall\ A \in \mathcal{F}\ :\qquad \mu^*(A)\ =\ \mu(A)$.

(e) $\forall\ A_n \subset \Omega\,,\quad n \in \mathbb{N}\ :\quad \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\ A_n\right)\ \le\ \sum_{n=1}^{\infty}\ \mu^*(A_n)$ (Subadditivität des äußeren Maßes).

Beweis: Die ersten drei Eigenschaften folgen direkt aus der Definition von μ^*. Um (d) zu beweisen, wenden wir die Sigma-Additivität von μ an auf $A_1 = B$ und $A_n = \emptyset$, $n \ge 1$, um zu sehen dass $\mu^*(B) \le \mu(B)$ ist. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung seien $A_n \in \mathcal{F}$ mit $B \subset \cup_1^\infty A_n$ gegeben. Mit $B_n = A_n \cap B$ folgt wegen der Subadditivität des Prämaßes μ, dass

$$\mu(B)\ \le\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\ \le\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,,$$

und hieraus folgt $\mu(B) \le \mu^*(B)$. Zum Beweis der Subadditivität von μ^* wählen wir zu $\varepsilon > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge (A_{nk}) von Mengen aus $\mathcal{F}$ so, dass

$$A_n\ \subset\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}\,,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\ \mu(A_{nk})\ \le \mu^*(A_n)\ +\ \varepsilon\,2^{-n}\,,$$

was nach Definition des Infimums bzw. des äußeren Maßes möglich ist, auch falls $\mu^*(A_n) = \infty$ ist. Dann folgt aber mit der Subadditivität von μ und der Tatsache dass die Vereinigung der A_n in der Vereinigung aller A_{nk} enthalten ist

$$\mu^* \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \;\leq\; \sum_{n,k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \;\leq\; \varepsilon \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\,.$$

Da ε beliebig war, folgt hieraus (e). □

3.3 Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Das Erstaunliche am Hauptresultat dieses Abschnittes ist, dass eine einfache Bedingung existiert, die eine Sigma-Algebra von Mengen $A \subset \Omega$ festlegt, auf der das oben definierte Prämaß zu einem Maß wird. Da dieses Maß eine Fortsetzung des anfangs gegebenen Inhaltes ist, heißt dieser wichtige Satz auch *der Fortsetzungssatz.*

Definition 3.3.1 *Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt* μ^*-messbar*, falls gilt:*

$$\forall\; B \;\subset\; \Omega \;:\quad \mu^*(B) \;=\; \mu^*(A \cap B) \;+\; \mu^*(B \setminus A)\,. \tag{3.3.1}$$

Die Menge aller dieser Mengen wird mit $\mathcal{A}^*$ bezeichnet.

Satz 3.3.2 (Fortsetzungssatz von Carathéodory) *Die oben definierte Menge $\mathcal{A}^*$ ist eine Sigma-Algebra, welche die Algebra $\mathcal{F}$ enthält, und die Restriktion von μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$, welches auf $\mathcal{F}$ mit dem Prämaß μ übereinstimmt.*

Beweis: Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

(a) **Beh:** $\emptyset \in \mathcal{A}^*$, und $A \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}^*$. **Bew:** Für $A = \emptyset$ ist (3.3.1) offenbar erfüllt. Wenn (3.3.1) für A gilt, und wenn $C = A^c$ ist, dann ist $C \cap B = B \setminus A$ und $B \setminus C = A \cap B$ für alle $B \subset \Omega$, und daher ist $C \in \mathcal{A}^*$.

(b) **Beh:** $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}^*$. **Bew:** Ersetzt man in (3.3.1) A durch A_1 und B durch $B \cap A_2$, so folgt

$$\mu^*(B \cap A_2) \;=\; \mu^*(A_2 \cap B \cap A_1) \;+\; \mu^*\big((B \cap A_2) \setminus A_1)\big)\,.$$

Für $C = B \setminus (A_1 \cap A_2)$ ist $C \cap A_2 = (B \cap A_2) \setminus A_1$, und daher folgt aus (3.3.1), mit C anstatt B und A_2 an Stelle von A:

$$\mu^*(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \;=\; \mu^*\big((B \cap A_2) \setminus A_1)\big) \;+\; \mu^*(B \setminus A_2)\,.$$

Wenn man nun (3.3.1) auf A_2 anwendet und die vorherigen Identitäten einsetzt, erhält man

$$\mu^*(B) \;=\; \mu^*(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \;+\; \mu^*(A_2 \cap B \cap A_1)\,.$$

Dies war zu zeigen.

(c) **Beh:** $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}^*$. **Bew:** Folgt aus (a) und (b) mit den de Morganschen Regeln.

(d) **Beh:** $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^*$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow \mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. **Bew:** Ersetzt man in (3.3.1) A durch A_1 und B durch $B \cap (A_1 \cup A_2)$, so folgt

$$\mu^*\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) \;=\; \mu^*(B \cap A_1) \;+\; \mu^*(B \cap A_2)\,.$$

Für $B = \Omega$ folgt dann die Beh.

(e) **Beh:** $A_k \in \mathcal{A}^*$, paarweise disjunkt $\forall\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow A := \cup_k A_k \in \mathcal{A}^*$. **Bew:** Wegen (c) ist $C_n = \cup_1^n A_k \in \mathcal{A}^*$für alle $n \in \mathbb{N}$. Unter Benutzung von (d) und (3.3.1) folgt daraus für alle $B \subset \Omega$

$$\mu^*(B) \;=\; \mu^*(B \cap C_n) + \mu^*(B \setminus C_n) \;=\; \mu^*(B \setminus C_n) + \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B \cap A_k) \;\geq\; \mu^*(B \setminus A) + \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B \cap A_k)\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt also

$$\mu^*(B) \;\geq\; \mu^*(B \setminus A) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k)\,.$$

Mit der Subadditivität von μ^* folgt schließlich

$$\mu^*(B) \;\leq\; \mu^*(B \cap A) \;+\; \mu^*(B \setminus A) \;\leq\; \mu^*(B \setminus A) \;\;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k)\,.$$

Also muss in den letzten beiden Abschätzungen überall das Gleichheitszeichen gelten, woraus die Beh. folgt.

(f) **Beh:** μ^* ist auf $\mathcal{A}^*$ sigma-additiv. **Bew:** Folgt aus dem Beweis von (e), wenn man $B = A$ einsetzt.

(g) **Beh:** $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^*$. **Bew:** Für $A \in \mathcal{F}$ und $B \subset \Omega$ gilt immer $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. Für $\varepsilon > 0$ seien $A_n \in \mathcal{F}$ so gewählt, dass $B \subset \cup_1^\infty A_n$ und $\sum_1^\infty \mu(A_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$, was nach Definition von μ^* immer möglich ist. Aus der Subadditivität von μ^* folgt dann

$$\mu^*(B \cap A) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A)\,, \qquad \mu^*(B \setminus A) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \setminus A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A)\,,$$

also mit Hilfe der Additivität von μ:

$$\mu^*(B \cap A) \;+\; \mu^*(B \setminus A) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)\bigr) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\leq\; \mu^*(B) + \varepsilon\,,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt zusammen mit der ersten Ungleichung dass $A \in \mathcal{A}^*$ ist.

Aus dem Vorangegangenen folgt offenbar die Behauptung des Satzes. □

Aufgabe 3.3.3 *Zeige dass die Sigma-Algebra $\mathcal{A}^*$ immer vollständig ist.*

Bemerkung 3.3.4 *Man kann zeigen, dass im Falle des Lebesguemaßes λ und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ die Sigma-Algebra $\mathcal{A}^*$ gleich der kleinsten vollständigen Sigma-Algebra ist, welche $\mathcal{F}$ enthält, und dies ist gerade die Lebesgue-Sigma-Algebra. Wenn dagegen $\mu = \lambda_g$ ein Lebesgue-Stieltjesmaß ist, kann $\mathcal{A}^*$ größer und im Extremfall sogar gleich der Potenzmenge von Ω sein. Im Allgemeinen ist nicht klar, ob es nur eine Fortsetzung eines Prämaßes auf die Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ gibt, aber wir zeigen dies im nächsten Satz für sigma-endliche Prämaße.*

Satz 3.3.5 (Eindeutigkeitssatz von Hahn) *Wenn das Prämaß μ sigma-endlich ist, gibt es genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf der Sigma-Algebra $\mathcal{A}^*$.*

Beweis: Nach Definition existieren $F_n \in \mathcal{F}$ mit $F_n \subset F_{n+1}$ und $\cup_n F_n = \Omega$ derart, dass $\mu(F_n) < \infty$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn ν ein Maß auf $\mathcal{A}^*$ ist, welches auf $\mathcal{F}$ mit μ (und daher auch mit μ^*) übereinstimmt, dann folgt für alle $E \in \mathcal{A}^*$ und $B_k \in \mathcal{F}$ mit $E \subset \cup_k B_k =: B$, dass

$$\nu(E \cap F_n) \;\leq\; \nu(B \cap F_n) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k \cap F_n) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k \cap F_n) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Also gilt $\nu(E\cap F_n) \le \mu^*(E\cap F_n)$ für alle n. Dieselbe Ungleichung gilt aber auch für $F_n \setminus E$ an Stelle von E. Weil $\mu^*(E\cap F_n) + \mu^*(F_n \setminus E) = \mu^*(F_n) = \nu(F_n) = \nu(E\cap F_n) + \nu(F_n \setminus E) \le \nu(E\cap F_n) + \mu^*(F_n \setminus E)$ ist, folgt aber auch $\nu(E\cap F_n) \ge \mu^*(E\cap F_n)$, wobei benutzt wird, dass $\mu^*(F_n \setminus E) < \infty$ ist. Also ist sogar $\nu(E\cap F_n) = \mu^*(E\cap F_n)$ für alle n, und mit der Stetigkeit des Maßes (Lemma 1.6.8) folgt für $n \to \infty$ dass $\nu(E) = \mu^*(E)$ ist. □

3.4 Produktmaße

In den folgenden Abschnitten betrachten wir immer zwei Maßräume $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $1 \le j \le 2$. Wir wollen zeigen, dass man im kartesischen Produkt $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_1$ stets auf natürliche Weise eine Algebra $\mathcal{A}$ und ein Maß π erhält, welches man als das Produktmaß bezeichnet.

Definition 3.4.1 (Rechtecke) *Für $A \in \mathcal{A}_1$ und $B \in \mathcal{A}_2$ nennen wir das kartesische Produkt $A \times B$ auch ein* (messbares) Rechteck *in Ω. Die Menge aller Vereinigungen endlich vieler solcher Rechtecke sei mit $\mathcal{F}$ bezeichnet – unten zeigen wir gleich, dass diese Menge eine Algebra ist.*

Lemma 3.4.2 *Die oben definierte Menge $\mathcal{F}$ ist eine Algebra.*

Beweis: Das einzige Axiom einer Algebra, was nicht offensichtlich von $\mathcal{F}$ erfüllt wird, ist (F2). Da der Durchschnitt zweier Rechtecke wieder ein Reckteck ist, folgt die Abgeschlossenheit von $\mathcal{F}$ gegenüber der Bildung von Durchschnitten, und wegen der de Morganschen Regeln genügt es, wenn wir zeigen dass das Komplement eines beliebigen Rechteckes immer zu $\mathcal{F}$ gehört. Dies gilt aber wegen

$$(A \times B)^c \;=\; (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c)\,.$$

Also gilt die Behauptung! □

Aufgabe 3.4.3 *Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_1$. Zeige mit Induktion über n, dass es Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{A}_1$ gibt, welche paarweise disjunkt sind und folgende Eigenschaften haben:*

$$\bigcup_{j=1}^n A_j \;=\; \bigcup_{k=1}^m C_k\,, \qquad \Big(A_j \cap C_k \ne \emptyset \implies C_k \subset A_j\Big) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n\,,\ k = 1, \ldots, m\,.$$

Benutze dies um zu zeigen, dass jede Menge aus $\mathcal{F}$ Vereinigung von endlich vielen disjunkten *Rechtecken ist. Gib ein Beispiel dafür, dass eine solche Darstellung aber nicht eindeutig zu sein braucht.*

Lemma 3.4.4 *Auf der Algebra $\mathcal{F}$ gibt es genau ein Prämaß π mit der Eigenschaft*

$$\pi(A \times B) \;=\; \mu_1(A)\,\mu_2(B) \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}_1\,,\ B \in \mathcal{A}_2\,. \tag{3.4.1}$$

Beweis: Wir führen den Beweis wieder in mehreren Schritten:

(a) **Beh:** Falls $A, A_n \in \mathcal{A}_1$ und $B, B_n \in \mathcal{A}_2$ sind, so dass $A \times B = \cup_1^\infty (A_n \times B_n)$ ist, wobei die Recktecke $A_n \times B_n$ paarweise disjunkt sind, dann gilt $\pi(A \times B) = \sum_1^\infty \pi(A_n \times B_n)$. **Bew:** Es gilt für die charakteristischen Funktionen von Intervallen

$$\chi_{A\times B}(\omega_1, \omega_2) \;=\; \chi_A(\omega_1)\,\chi_B(\omega_2) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}(\omega_1)\,\chi_{B_n}(\omega_2) \qquad \forall\, \omega_1 \in \Omega_1\,,\ \omega_2 \in \Omega_2\,.$$

Bei festem ω_1 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int \chi_A(\omega_1)\, \chi_B \, d\mu_2 \;=\; \chi_A(\omega_1)\, \mu_2(B)\,, \qquad \int \chi_{A_n}(\omega_1)\, \chi_{B_n} \, d\mu_2 \;=\; \chi_A(\omega_1)\, \mu_2(B_n)\,.$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi folgt daraus

$$\chi_A(\omega_1)\, \mu_2(B) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A_n}(\omega_1)\, \chi_{B_n} \, d\mu_2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(\omega_1)\, \mu_2(B_n)\,.$$

Durch erneute Anwendung desselben Satzes zeigt man dann

$$\mu_1(A)\, \mu_2(B) \;=\; \int \chi_A \, \mu_2(B)\, d\mu_1 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A_n}\, \mu_2(B_n)\, d\mu_1 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)\, \mu_2(B_n)\,.$$

(b) **Beh:** Falls $C \in \mathcal{F}$ ist, gibt es nach Aufgabe 3.4.3 $A_k \in \mathcal{A}_1$ und $B_k \in \mathcal{A}_2$, mit $C = \cup_1^n (A_k \times B_k)$, wobei die Recktecke $A_k \times B_k$ paarweise disjunkt sind, und wir können definieren

$$\pi(C) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \pi(A_k \times B_k)\,,$$

weil $\pi(C)$ nicht von der Wahl der A_k, B_k abhängt. **Bew:** Sei $C = \cup_1^m (\tilde{A}_j \times \tilde{B}_j)$ mit paarweise disjunkten Rechtecken $\tilde{A}_j \times \tilde{B}_j$, dann folgt

$$\tilde{A}_j \times \tilde{B}_j \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} \Big((\tilde{A}_j \times \tilde{B}_j) \cap (A_k \times B_k) \Big) \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} \Big((\tilde{A}_j \cap A_k) \times \tilde{B}_j \cap B_k) \Big)\,,$$

und mit Hilfe von (a) folgt

$$\pi(\tilde{A}_j \times \tilde{B}_j) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \pi\Big((\tilde{A}_j \cap A_k) \times \tilde{B}_j \cap B_k) \Big)\,.$$

Dies bedeutet aber, wenn man bei der zweiten Umformung erneut (a) einsetzt, dass

$$\sum_{j=1}^{m} \pi(\tilde{A}_j \times \tilde{B}_j) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi\Big((\tilde{A}_j \cap A_k) \times \tilde{B}_j \cap B_k) \Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \pi(A_k \times B_k)$$

ist, was zu zeigen war.

(c) **Beh:** Die in (b) eindeutig definierte Abbildung $\pi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist ein Prämaß. **Bew:** Nur die Sigma-Additivität ist zu zeigen. Seien also $C_j \in \mathcal{F}$, paarweise disjunkt, und sei deren Vereinigung C ebenfalls in $\mathcal{F}$. Dann gibt es $A_k \in \mathcal{A}_1$ und $B_k \in \mathcal{A}_2$, mit $C = \cup_1^n (A_k \times B_k)$, wobei die Recktecke $A_k \times B_k$ paarweise disjunkt sind. Genauso gibt es $A_{k,j} \in \mathcal{A}_1$ und $B_{k,j} \in \mathcal{A}_2$, mit $C_j = \cup_1^{n(j)} (A_{k,j} \times B_{k,j})$, wobei auch diese Recktecke paarweise disjunkt sind, und es folgt

$$A_k \times B_k \;=\; \bigcup_{j=1}^{\infty} \Big(C_j \cap (A_k \times B_k) \Big) \;=\; \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{n(j)} \Big((A_{\ell,j} \cap A_k) \times (B_{\ell,j} \cap B_k) \Big)\,.$$

Daher folgt durch wiederholte Anwendung von (a) sowie der Definition von $\pi(C)$ und $\pi(C_j)$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(A_k \times B_k) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n(j)} \sum_{k=1}^{n} \pi\Big((A_{\ell,j} \cap A_k) \times (B_{\ell,j} \cap B_k) \Big) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n(j)} \pi(A_{\ell,j} \times B_{\ell,j}) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \pi(C_j)$$

ist, was zu zeigen war.

Aus den zuvor gezeigten Punkten folgt, dass wir ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ definiert haben, und dessen Eindeutigkeit ist klar, da ein solches Prämaß insbesondere sigma-additiv sein muss, und deshalb ist die in (b) gegebene Definition für $\pi(C)$ die einzig mögliche. $\square$

Satz 3.4.5 (Existenz bzw. Eindeutigkeit des Produktmaßes) *Unter den in diesem Abschnitt gemachten Voraussetzungen gibt es auf der von allen Rechtecken erzeugten Sigma-Algebra ein Maß π, welches* (3.4.1) *erfüllt. Wenn die beiden Maße μ_1 und μ_2 beide sigma-endlich sind, ist π eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Lemma 3.4.4 sowie den Sätzen von Carathéodory und Hahn. $\square$

Definition 3.4.6 *Jedes der Maße π, die nach dem letzten Satz existieren, heißt* Produktmaß *auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Ausgehend von $\mathbb{R}$ und dem Lebesgueschen Maß können wir induktiv auf $\mathbb{R}^d$ ein Maß erhalten, indem wir $\mathbb{R}^d$ als kartesisches Produkt von $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ mit $p+q=d$ auffassen; da die auftretenden Maße alle sigma-endlich sind, spielt es dabei keine Rolle, wie wir p und q wählen, denn das Maß auf $\mathbb{R}^d$ ist dadurch, dass es den d-dimensionalen Intervallen jeweils den Inhalt zuordnet, bereits eindeutig festgelegt. Das so erhaltene Maß auf $\mathbb{R}^d$ wird ebenfalls als* Lebesguemaß *bezeichnet. Statt des Lebesguemaßes kann man auf $\mathbb{R}$ auch ein Lebesgue-Stieltjes-Maß betrachten und dazu die entsprechenden Produktmaße bilden. Allerdings gibt es auf der Lebesgue-Sigma-Algebra in $\mathbb{R}^d$ noch allgemeinere Maße, die mit Hilfe einer Funktion von d Variablen definiert werden, und die man auf diese Weise nicht erhält. Dies soll hier nicht besprochen werden.*

3.5 Die Sätze von Tonelli und Fubini

Jetzt betrachten wir zwei sigma-endliche Maßräume $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $1 \le j \le 2$, und hierzu den *Produktraum* $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$, wobei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_1$ und $\mathcal{A}$ die von allen Rechtecken erzeugte Sigma-Algebra ist, und π ist die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung des im letzten Abschnitt definierten Prämaßes.

Definition 3.5.1 *Für $E \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ schreiben wir*

$$E_{\omega_1} \;=\; \{\, \omega_2 \in \Omega_2 \;:\; (\omega_1, \omega_2) \;\in\; E \,\}, \qquad E^{\omega_2} \;=\; \{\, \omega_1 \in \Omega_1 \;:\; (\omega_1, \omega_2) \;\in\; E \,\}. \tag{3.5.1}$$

Wir interpretieren E_{ω_1}, bei festem, aber beliebigem $\omega_1 \in \Omega_1$, als Schnitt *in Richtung Ω_1, und entsprechend für E_{ω_1}. Analog definieren wir für $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei neue Funktionen*

$$F_{\omega_1}(\omega_2) \;=\; F^{\omega_2}(\omega_1) \;=\; F(\omega_1, \omega_2) \qquad \forall\, (\omega_1, \omega_2) \;\in\; \Omega\,. \tag{3.5.2}$$

Das bedeutet, dass wir in F z. B. die Variable ω_1 festhalten und dadurch F_{ω_1} als eine Funktion der einen Variablen ω_2 definieren.

Lemma 3.5.2 *Für $E \in \mathcal{A}$ sind $E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ bzw. $E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$, für alle $\omega_1 \in \Omega_1$, bzw. alle $\omega_2 \in \Omega_2$. Weiter folgt für $F \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$, dass $F_{\omega_1} \in \mathcal{M}(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $F^{\omega_2} \in \mathcal{M}(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ist, für alle $\omega_1 \in \Omega_1$, bzw. alle $\omega_2 \in \Omega_2$.*

Beweis: Sei $\overline{\mathcal{A}}$ die Menge aller $E \in \mathcal{A}$, für die $E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ ist für alle $\omega_1 \in \Omega_1$. Es ist leicht zu sehen, dass $\overline{\mathcal{A}}$ eine Sigma-Algebra ist, die alle Rechtecke enthält, und daher folgt $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Genauso folgt die Aussage $E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$. Weil z. B. $\{F_{\omega_1}(\omega_2) > \alpha\} = E_{\omega_1}$ ist für $E = \{F(\omega_1, \omega_2) > \alpha\}$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, folgt der zweite Teil der Behauptung aus dem ersten. $\square$

Lemma 3.5.3 (Cavalierisches Prinzip) *Für jedes $E \in \mathcal{A}$ sind die Funktionen f und g mit*

$$f(\omega_1) \;=\; \mu_2(E_{\omega_1})\,, \qquad g(\omega_2) \;=\; \mu_1(E_{\omega_2}) \qquad \forall\ \omega_1 \in \Omega_1\,,\ \omega_2 \in \Omega_2$$

beide messbar, und es gilt

$$\int_{\Omega_1} f\,d\mu_1 \;=\; \int_{\Omega_2} g\,d\mu_2 \;=\; \pi(E)\,. \tag{3.5.3}$$

Beweis: Aus der Voraussetzung der Sigma-Endlichkeit folgt die Existenz von Folgen (A_n) aus $\mathcal{A}_1$ und (B_n) aus $\mathcal{A}_2$ mit $A_n \subset A_{n+1}$, $B_n \subset B_{n+1}$, $\mu_1(A_n) < \infty$, $\mu_2(B_n) < \infty$, so dass $\cup A_n = \Omega_1$ und $\cup B_n = \Omega_2$ ist. Für festes n sei $\mathcal{M}$ gleich der Menge aller $E \in \mathcal{A}$, mit $E \subset A_n \times B_n$, für die die Aussage des Lemmas richtig ist. Man sieht sofort, dass alle Rechtecke $A \times B \subset A_n \times B_n$ zu $\mathcal{M}$ gehören. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz und der Stetigkeit des Maßes (Lemma 1.6.8) ergibt sich weiter, dass $\mathcal{M}$ die Voraussetzungen von Lemma 3.1.6 erfüllt, und daher folgt dass $\mathcal{M}$ alle messbaren Teilmengen von $A_n \times B_n$ enthält. Wenn jetzt $E \in \mathcal{A}$ beliebig ist, dann gilt (3.5.3) für alle $E_n = E \cap (A_n \times B_n)$, und eine nochmalige Anwendung des Satzes über die monotone Konvergenz und der Stetigkeit des Maßes ergibt die Behauptung. $\square$

Satz 3.5.4 (Tonelli) *Sei $F \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ und $F_{\omega_1}, F^{\omega_2}$ wie in* Definition 3.5.1. *Dann sind die durch*

$$f(\omega_1) \;=\; \int_{\Omega_2} F_{\omega_1}\,d\mu_2\,, \qquad g(\omega_2) \;=\; \int_{\Omega_1} F^{\omega_2}\,d\mu_1 \qquad \forall\ \omega_1 \in \Omega_1\,,\ \omega_2 \in \Omega_2$$

definierten Funktionen f und g messbar, und es gilt

$$\int_{\Omega} F\,d\pi \;=\; \int_{\Omega_1} f\,d\mu_1 \;=\; \int_{\Omega_2} g\,d\mu_2\,. \tag{3.5.4}$$

Beweis: Die Behauptung des Satzes ist richtig, falls F die charakteristische Funktion einer Menge $E \in \mathcal{A}$ ist, und wegen der Linearität der betrachteten Integrale gilt sie dann für alle einfachen Funktionen mit nicht-negativen Werten. Für allgemeines $F \in \mathcal{M}^+(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ gibt es eine Folge einfacher Funktionen Φ_n, welche monoton wachsend gegen F konvergieren. Die Funktionen $\phi_n(\omega_1) = \int_{\Omega_2} (\Phi_n)_{\omega_1}\,d\mu_2$ und $\psi_n(\omega_2) = \int_{\Omega_1} (\Phi_n)^{\omega_2}\,d\mu_1$ sind dann ebenfalls monoton wachsend und konvergieren gegen f bzw. g. Daher folgt die Behauptung aus dem Satz über die monotone Konvergenz. $\square$

Satz 3.5.5 (Fubini) *Sei F über Ω integrierbar. Dann existieren die Integrale*

$$f(\omega_1) \;:=\; \int_{\Omega_2} F_{\omega_1}\,d\mu_2\,, \qquad g(\omega_2) \;:=\; \int_{\Omega_1} F^{\omega_2}\,d\mu_1$$

für μ_1-fast alle ω_1 bzw. μ_2-fast alle ω_2, die so fast überall definierten Funktionen f und g sind integrierbar, d.h. genauer, sie lassen sich zu über Ω_1 bzw. Ω_2 ingrierbaren Funktionen fortsetzen, und es gilt (3.5.4).

Beweis: Aus dem Satz von Tonelli, angewandt auf F^+ und F^-, folgt dass die Funktionen

$$f^+(\omega_1) \;:=\; \int_{\Omega_2} F^+_{\omega_1}\,d\mu_2\,, \qquad f^-(\omega_1) \;:=\; \int_{\Omega_2} F^-_{\omega_1}\,d\mu_1$$

beide über Ω_1 integrierbar sind, und dass ihre Integrale gleich $\int_\Omega F^+\,d\pi$ bzw. $\int_\Omega F^-\,d\pi$, also insbesondere endlich sind. Also folgt, dass $f^\pm(\omega_1) < \infty$ μ_1–f. ü. gilt. Daher ist $f(\omega_1) = f^+(\omega_1) - f^-(\omega_1)$ μ_1–f. ü. definiert, und wenn man $f(\omega_1) = 0$ setzt falls $f^+(\omega_1)$ oder $f^-(\omega_1)$ gleich ∞ ist, dann ist f integrierbar und

$$\int_{\Omega_1} f\,d\mu_1 \;=\; \int_{\Omega_1} f^+\,d\mu_1 \;-\; \int_{\Omega_1} f^-\,d\mu_1 \;=\; \int_{\Omega} F^+\,d\pi \;-\; \int_{\Omega} F^-\,d\pi\,,$$

woraus (3.5.4) folgt. $\square$

Kapitel 4

Weitere Resultate

In diesem Kapitel sei wieder ein fester, aber beliebiger Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gegeben, und wir betrachten Funktionen, die auf Ω (oder evtl. auf einer Teilmenge) definiert sind und Werte in $\mathbb{K}$ haben, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ sein kann. Dabei soll für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine solche Funktion messbar bzw. integrierbar genannt werden, wenn sowohl ihr Real- als auch ihr Imaginärteil messbar bzw. integrierbar sind. Um die Bezeichungen einfach zu halten, werden wir z. B. weiterhin $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für die Menge aller integrierbaren Funktionen schreiben, wobei sich aus dem Zusammenhang ergeben muss, ob die Funktionswerte reelle oder komplexe Zahlen sein sollen.

4.1 Funktionenräume

Definition 4.1.1 *Wenn $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine auf Ω definierte Funktion mit möglicherweise komplexen Werten ist, dann sei $u(\omega) := \mathrm{Re}\ f(\omega)$ und $v(\omega) := \mathrm{Im}\ f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Es gilt dann also $f = u + i\,v$, und wir nennen f* messbar *bzw.* integrierbar*, falls u und v beide messbar bzw. integrierbar sind. Offenbar ist die Integrierbarkeit von f, wie im Fall reellwertiger Funktionen, äquivalent zur Integrierbarkeit von $|f|$. Wir definieren für integrierbares f dann auch*

$$\int_\Omega f\,d\mu \;=\; \int_\Omega u\,d\mu \;+\; i\,\int_\Omega v\,d\mu\,.$$

Dies bedeutet also, dass man bei komplexwertigen Funktionen die Integrale von Real- und Imaginärteil getrennt ausrechnen soll. Für $1 \le p < \infty$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen f mit Werten in $\mathbb{K}$ und der Eigenschaft

$$\|f\|_p \;:=\; \Big(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \;<\; \infty\,.$$

Dabei nennen wir $\|f\|_p$ auch die p-Norm von f*, obwohl die Abbildung $f \longmapsto \|f\|_p$ im Allgemeinen nicht alle Eigenschaften einer Norm besitzt. Anstatt $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ schreiben wir gelegentlich auch einfach $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Wenn $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, nennt man $\|f\|_p^p$ auch* p-tes Moment von f. *Wir nennen eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ auch* Cauchyfolge im Sinne der p-Norm*, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n, m \ge N\ : \qquad \|f_n - f_m\|_p \;<\; \varepsilon\,.$$

Weiter sagen wir, dass (f_n) in der p-Norm gegen ein $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ konvergiert*, wenn $\|f_n - f\|_p$ eine Nullfolge ist.*

Aufgabe 4.1.2 *Sei $p \ge 1$, und sei $g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeige: Wenn f messbar ist, und wenn gilt $|f(\omega)| \le |g(\omega)|$ μ–f. ü., dann ist auch $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Schließe hieraus, dass genau dann alle beschränkten Funktionen zu $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gehören, wenn $\mu(\Omega) < \infty$ ist.*

Aufgabe 4.1.3 *Sei $p \geq 1$. Zeige: Genau dann ist f in $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wenn* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *beide in $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind.*

Satz 4.1.4 (Höldersche Ungleichung) *Für alle $p > 1$ und $q := (1-1/p)^{-1}$ gilt: Wenn $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind, dann ist $f\,g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, und*

$$\|f\,g\|_1 \;\leq\; \|f\|_p\,\|g\|_q\,.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass die rechte Seite der Ungleichung positiv ist, denn im anderen Fall ist $f(\omega) = 0$ oder $g(\omega) = 0$ μ–f. ü., und dann verschwindet auch die linke Seite. Für $h(x) = x^{1/p} - x/p$, $x \geq 1$, folgt $h'(x) \leq 0$, also $h(x) \leq h(1) = 1/q$, für alle $x > 0$. Für $\alpha \geq \beta > 0$ kann man x durch α/β ersetzen und erhält nach Multiplikation mit β die Ungleichung

$$\alpha^{1/p}\,\beta^{1/q} \;\leq\; (\alpha/p) \;+\; (\beta/q)\,.$$

Diese Ungleichung gilt auch, wenn man p und q vertauscht, und daher muss sie auch bei Vertauschung von α und β richtig bleiben. Daher gilt sie sogar für alle nicht-negativen α und β, und wenn man jetzt $\alpha = (|f(\omega)|/\|f\|_p)^p$ und $\beta = (|g(\omega)|/\|g\|_q)^q$ einsetzt und die Ungleichung über Ω integriert, folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.5 (Minkowskische Ungleichung) *Für jedes $1 \leq p < \infty$ ist $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und für $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt immer die Dreiecksungleichung*

$$\|f+g\|_p \;\leq\; \|f\|_p \;+\; \|g\|_p\,.$$

Beweis: Aus der Definition der p-Norm folgt sofort dass $\|\alpha\,f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$ ist, für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Für die Vektorraumeigenschaft von $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ reicht es deshalb aus, wenn wir die Dreiecksungleichung zeigen. Für $p = 1$ ist diese klar, und daher sei jetzt $p > 1$ und $q = (1-1/p)^{-1}$. Dann folgt für alle $\omega \in \Omega$

$$|f(\omega)+g(\omega)|^p \;\leq\; 2^p\,\max\{|f(\omega)|^p, |g(\omega)|^p\} \;\leq\; 2^p\,\left(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p\right),$$

und daher ist $f+g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich dann

$$\int |f+g|^p\,d\mu \;\;\leq\; \int (|f|+|g|)^p\,d\mu \;=\; \int |f|\,(|f|+|g|)^{p-1} d\mu \;+\; \int |g|\,(|f|+|g|)^{p-1} d\mu\,.$$

Durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung auf die Terme der rechten Seite folgt wegen $q\,(p-1) = p$

$$\int (|f|+|g|)^p\,d\mu \;\leq\; (\|f\|_p + \|g\|_p)\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q \;=\; (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\Big(\int (|f|+|g|)\,d\mu\Big)^{1/q},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 4.1.6 *Beachte, dass für $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aus $\|f\|_p = 0$ lediglich folgt $f(\omega) = 0$ μ–*f. ü. *Also ist $\|\cdot\|_p$ eigentlich nur eine Halbnorm auf $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. In der Funktionalanalysis nennt man daher zwei Funktionen äquivalent bzgl. μ, wenn sie μ–*f. ü. *gleich sind, und definiert $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ als die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen. Dies spielt hier aber keine Rolle.*

Aufgabe 4.1.7 *Sei $p \geq 1$, und sei (f_n) eine Cauchyfolge im Sinne der p-Norm. Zeige: Wenn eine Teilfolge von (f_n) in der p-Norm gegen ein $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ konvergiert, dann gilt dasselbe bereits für die gesamte Folge. Überlege, ob diese Tatsache überhaupt von der konkreten Norm abhängt!*

Satz 4.1.8 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) *Sei $p \geq 1$, und sei (f_n) eine Cauchyfolge im Sinne der p-Norm. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so dass eine Teilfolge von (f_n) μ-f. ü. gegen f konvergiert, und die Folge (f_n) selber konvergiert in der p-Norm gegen f.*

Beweis: Aus der Definition von Cauchyfolge ergibt sich die Existenz einer Teilfolge (g_k), für welche $\|g_k - g_{k+1}\|_p \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir definieren $g(\omega) = \sum_k |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)|$, dann ist $g \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Mit dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\Big(\int g^p \, d\mu \Big)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{n} |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| \Big\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\|_p < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} .$$

Also ist $g(\omega)$ für fast alle ω endlich. Darum konvergiert die Folge $(g_n(\omega) := g_1(\omega) + \sum_{k=1}^{n-1}(g_{k+1}(\omega) - g_k(\omega)))$ außerhalb einer Nullmenge N gegen eine Funktion $f(\omega)$, und wenn wir diese Funktion auf N z. B. $= 0$ setzen, dann ist f messbar. Es folgt dann mit dem Satz von Lebesgue

$$\int_\Omega |f - g_n|^p \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \Big| \sum_{k=n}^{m} (g_k - g_{k+1}) \Big|^p \, d\mu ,$$

und mit der Dreiecksungleichung und der Wahl der g_k folgt daher $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $\|f - g_n\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|g_k - g_{k+1}\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}$. Daher konvergiert die Teilfolge (g_k) in der p-Norm gegen f, und mit Aufgabe 4.1.7 folgt dann die Behauptung. □

Aufgabe 4.1.9 *Sei $p \geq 1$. Zeige, z. B. mit Hilfe der Dreiecksungleichung der p-Norm: Wenn $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind, dann ist auch h mit $h(\omega) := \max\{|f(\omega)|, |g(\omega)|\}$ in $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

Aufgabe 4.1.10 *Seien $\tilde{p} > p \geq 1$ und $\mu(\Omega) < \infty$. Zeige $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \supset \mathcal{L}_{\tilde{p}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

4.2 Verschiedene Konvergenzbegriffe in der Maßtheorie

Wenn nichts anderes gesagt wird, seien f, f_n immer messbare Funktionen auf Ω, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Werten in $\mathbb{K}$. Insbesondere sind die Werte der Funktionen alle endlich! Außer der schon definierten Konvergenz im Sinne einer der p-Normen gibt es einige weitere wichtige Konvergenzbegriffe in der Maßtheorie, die wir jetzt definieren und vergleichen wollen. Dabei wiederholen wir auch noch die Begriffe der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz:

Definition 4.2.1 *Die Folge (f_n) heißt auf Ω gegen die Grenzfunktion f*

(a) punktweise konvergent*, falls*

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n \geq N : \quad |f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon ,$$

(b) gleichmäßig konvergent*, falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, n \geq N : \quad |f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon ,$$

(c) fast überall konvergent*, falls es eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, so dass (f_n) auf N^c punktweise gegen f konvergiert,*

(d) maßkonvergent *oder* stochastisch konvergent, *falls alle* f_n *sowie auch* f *messbar sind, und falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ : \qquad \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{\,|f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \varepsilon\,\}\big) \ = \ 0\,,$$

(e) fast gleichmäßig konvergent, *falls für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $E \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(E) < \varepsilon$ *existiert, so dass die Folge auf* E^c *gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

Satz 4.2.2 *Sei* $\mu(\Omega) < \infty$, *sei* $p \geq 1$, *und seien* $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Wenn die Folge* (f_n) *gleichmäßig gegen* f *konvergiert, dann folgt* $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *und* (f_n) *ist auch* $\mathcal{L}_p$*-konvergent gegen* f.

Beweis: Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt $|f_n(\omega) - f(\omega)| \leq 1$ für alle genügend großen n, und die Funktion $g(\omega) \equiv 1$ ist in $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, da $\mu(\Omega)$ endlich ist. Also folgt $f_n - f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für (ein) großes n, und daraus wiederum folgt $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Wegen $\|f_n - f\|_p \leq (\mu(\Omega))^{1/p} \sup |f_n(\omega) - f(\omega)|$ folgt die $\mathcal{L}_p$-Konvergenz. □

Aufgabe 4.2.3 *Zeige, dass im letzten Satz die Voraussetzung* $\mu(\Omega) < \infty$ *nicht weggelassen werden kann.*

Der nächste Satz ist eine einfache Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue:

Satz 4.2.4 *Sei* $p \geq 1$, *und seien* $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Wenn die Folge* (f_n) *fast überall gegen* f *konvergiert, und wenn es ein* $g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *gibt mit* $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $\omega \in \Omega$, *dann folgt* $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *und* (f_n) *ist auch* $\mathcal{L}_p$*-konvergent gegen* f.

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt$|f(\omega)| \leq g(\omega)$ μ–f. ü., und daher ist $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Wegen $|f_n(\omega) - f(\omega)|^p \leq (2\, g(\omega))^p$ μ–f. ü. folgt mit dem Satz von Lebesgue die $\mathcal{L}_p$-Konvergenz. □

Korollar zu Satz 4.2.4 (Satz von der beschränkten Konvergenz) *Sei* $p \geq 1$, *sei* $\mu(\Omega) < \infty$, *und seien* $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Wenn die Folge* (f_n) *fast überall gegen* f *konvergiert, und wenn es ein* $K > 0$ *gibt mit* $|f_n(\omega)| \leq K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $\omega \in \Omega$, *dann folgt* $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *und* (f_n) *ist auch* $\mathcal{L}_p$*-konvergent gegen* f.

Beweis: Setze $g(\omega) \equiv K$. □

Aufgabe 4.2.5 *Zeige: Wenn die Folge* (f_n) *gleichmäßig gegen* f *konvergiert, dann ist sie auch maßkonvergent gegen* f.

Lemma 4.2.6 *Sei* $p \geq 1$, *und seien* $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Wenn die Folge* (f_n) $\mathcal{L}_p$*-konvergent gegen* f *ist, dann ist sie auch maßkonvergent gegen* f.

Beweis: Für $E_n := \{\,|f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \varepsilon\,\}$ folgt

$$\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \ \geq \ \int_{E_n} |f_n - f|^p \, d\mu \ \geq \ \varepsilon^p \, \mu(E_n)\,,$$

und daher gilt die Behauptung. □

Definition 4.2.7 *Die Folge* (f_n) *heißt* Cauchyfolge im Sinne der Maßkonvergenz, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n, m \geq N \;: \qquad \mu\big(\{\, |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \geq \delta\,\}\big) \;<\; \varepsilon\,.$$

Aufgabe 4.2.8 *Zeige dass jede maßkonvergente Folge auch Cauchyfolge im Sinne der Maßkonvergenz ist.*

Satz 4.2.9 (Vollständigkeit im Sinne der Maßkonvergenz) *Sei* (f_n) *eine Cauchyfolge im Sinne der Maßkonvergenz. Dann existiert eine Teilfolge, welche fast überall gegen eine messbare Funktion* f *konvergiert, und die Gesamtfolge* (f_n) *ist maßkonvergent gegen* f*.*

Beweis: Wendet man die Definition von Cauchyfolge auf $\varepsilon = \delta = 2^{-k}$ an, so findet man dass die Folge (f_n) eine Teilfolge (g_k) enthält, für welche gilt

$$\mu\big(\{\, |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| \geq 2^{-k}\,\}\big) \;<\; 2^{-k} \qquad \forall\, k \geq 1\,.$$

Definiert man $E_k = \{\, |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| \geq 2^{-k}\,\}$ und $F_j = \cup_j^\infty E_k$, so folgt mit der Subadditivität des Maßes dass $\mu(F_j) \leq 2^{-j+1}$ ist. Für $F := \cap F_j$ folgt daher $\mu(F) = \lim \mu(F_j) = 0$, und für jedes $\omega \in F^c$ folgt $\omega \in F_j^c$ für genügend großes j, und somit gilt

$$\exists\, k_0 \qquad \forall\, k \geq k_0 \;: \qquad |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| < 2^{-k}\,.$$

Daher folgt die Konvergenz von (g_k) auf F^c gegen eine messbare Funktion f. Wenn wir n_k so definieren dass $g_k = f_{n_k}$ ist, folgt

$$|f(\omega) - f_n(\omega)| \;\leq\; |f(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \;+\; |f_{n_k}(\omega) - f_k(\omega)|\,,$$

und für $\delta > 0$ gilt daher $\{\, |f(\omega) - f_n(\omega)| \geq \delta\} \subset \{\, |f(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \geq \delta/2\} \cup \{\, |f_{n_k}(\omega) - f_k(\omega)| \geq \delta/2\}$. Daraus folgt aber

$$\mu\big(\{\, |f(\omega) - f_n(\omega)| \geq \delta\,\}\big) \;\leq\; \mu\big(\{\, |f(\omega) - g_k(\omega)| \geq \delta/2\,\}\big) \;+\; \mu\big(\{\, |f_{n_k}(\omega) - f_n(\omega)| \geq \delta/2\,\}\big)\,,$$

und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist der zweite Summand rechts kleiner als $\varepsilon/2$, falls k und n hinreichend groß sind. Es ist nach Definition der g_k klar dass $|f(\omega) - g_k(\omega)| \leq \sum_k^\infty |g_{j+1}(\omega) - g_j(\omega)| \leq \sum_k^\infty 2^{-j}$ falls $\omega \in F_k^c$ ist, und daher folgt für große k dass $\mu(\{\, |f(\omega) - g_k(\omega)| \geq \delta/2\,\}) \leq \mu(F_k) < \varepsilon/2$ ist. Das war noch zu zeigen. □

Satz 4.2.10 *Sei* $p \geq 1$*, und seien* $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Wenn ein* $g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *existiert mit* $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ μ–f. ü. *für alle* n*, und wenn die Folge* (f_n) *maßkonvergent gegen* f *ist, dann ist sie auch* $\mathcal{L}_p$*-konvergent gegen* f*.*

Beweis: Falls (f_n) nicht $\mathcal{L}_p$-konvergent gegen f ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (g_k) so, dass $\|f - g_k\|_p \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da (g_k) maßkonvergent gegen f ist, gibt es nach dem letzten Satz eine Teilfolge, welche fast überall gegen f strebt, und diese ist nach Satz 4.2.4 dann $\mathcal{L}_p$-konvergent gegen f, was nicht sein kann. □

Lemma 4.2.11 *Wenn die Folge* (f_n) *fast gleichmäßig gegen* f *konvergiert, dann konvergiert sie auch fast überall gegen* f*.*

Beweis: Bei fast gleichmäßiger Konvergenz existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Menge $E_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E_k) < 2^{-k}$, so dass die Konvergenz auf E_k^c gleichmäßig ist. Wie im Beweis von Satz 4.2.9 folgt dass $F = \cap_j \cup_{k \geq j} E_k$ eine Nullmenge ist, und für $\omega \in F^c$ folgt $\omega \in E_k^c$ für alle großen k, woraus die Konvergenz von $(f_k(\omega))$ gegen $f(\omega)$ folgt. □

Satz 4.2.12 *Wenn die Folge (f_n) fast gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist sie auch maßkonvergent gegen f. Umgekehrt folgt aus der Maßkonvergenz die Existenz einer fast gleichmäßig konvergenten Teilfolge.*

Beweis: Sei (f_n) fast gleichmäßig gegen f konvergent, und seien $\varepsilon, \delta > 0$. Dann gibt es ein $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \varepsilon$ so, dass die Konvergenz auf E^c gleichmäßig ist. Also folgt $\{|f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \delta\} \subset E$ für alle hinreichend großen n, was die Maßkonvergenz bedeutet. Umgekehrt sieht man bei Maßkonvergenz dass die im Beweis von Satz 4.2.9 gewählte Teilfolge (g_k) auf jedem der F_j^c gleichmäßig konvergiert, woraus ihre fast gleichmäßige Konvergenz folgt. □

Korollar 1 zu Satz 4.2.12 *Sei $p \geq 1$, und seien $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Wenn (f_n) $\mathcal{L}_p$-konvergent gegen f ist, dann existiert eine Teilfolge, welche fast gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Folgt wegen Lemma 4.2.6. □

Korollar 2 zu Satz 4.2.12 *Wenn die Folge (f_n) fast gleichmäßig gegen f konvergiert, und wenn es ein $g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt mit $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ μ–*f. ü. *für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, und (f_n) ist auch $\mathcal{L}_p$-konvergent gegen f.*

Beweis: Folgt wegen Satz 4.2.10. □

Der folgende Satz ist überraschend, da man die Fast-Überall-Konvergenz als eine sehr schwache Voraussetzung empfindet! Trotzdem zeigt der Satz, dass bei endlichem Maßraum die Fast-Überall-Konvergenz mit der fast gleichmäßigen Konvergenz übereinstimmt!

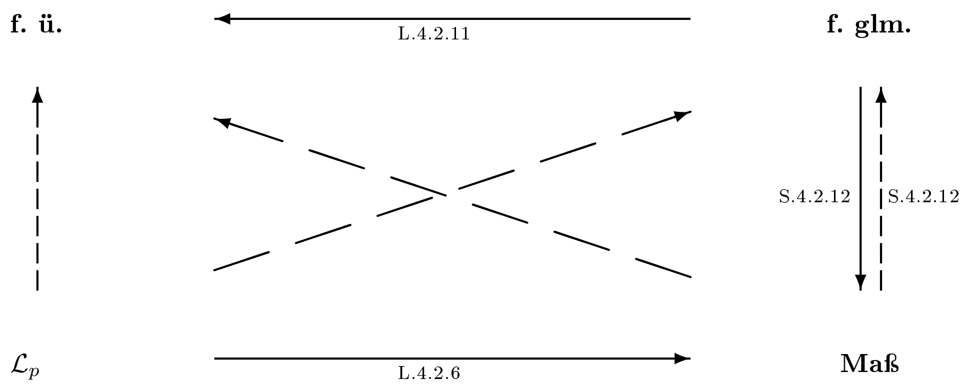
Satz 4.2.13 (Egoroff) *Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Wenn die Folge (f_n) fast überall gegen f konvergiert, dann konvergiert sie sogar fast gleichmäßig.*

Beweis: Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $E_{n,m} = \cup_{k \geq n}\{|f_k(\omega) - f(\omega)| \geq 1/m\}$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$: $E_{n+1,m} \subset E_{n,m}$, und $E_m := \cap_n E_{n,m}$ ist enthalten in der Menge der ω, für welche die Folge nicht gegen f konvergiert und ist deshalb eine Nullmenge. Wegen der Stetigkeit des Maßes sind also für festes m die Maße $\mu(E_{n,m})$ Nullfolgen. Für $\delta > 0$ gibt es demnach $n(m)$ so, dass $\mu(E_{n(m),m}) < \delta\, 2^{-m}$ ist. Sei $E := \cup_m E_{n(m),m}$, dann folgt $\mu(E) < \delta$, und für $\omega \in E^c$, d. h. für $\omega \in E^c_{n(m),m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, gilt $|f_k(\omega) - f(\omega)| \geq 1/m$ für alle $k \geq n(m)$. Dies ergibt die fast gleichmäßigeKonvergenz. □

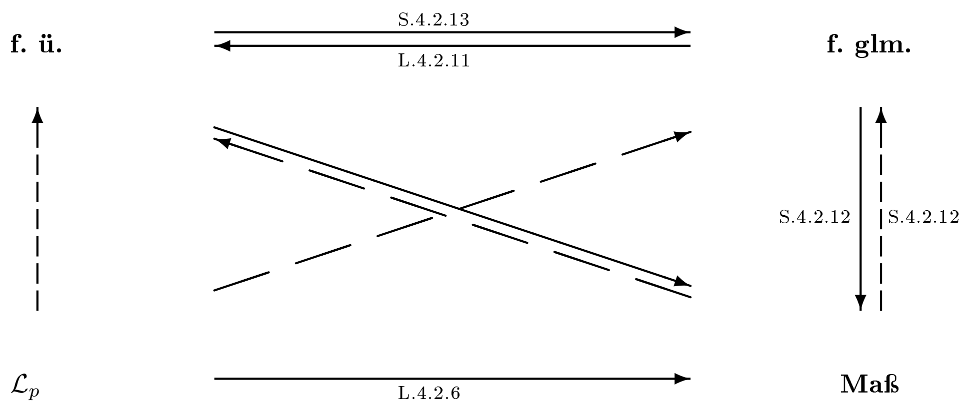
4.3 Zusammenstellung der Resultate aus Abschnitt 4.2

In den folgenden Diagrammen stellen wir die Resultate zusammen, die wir für die vier zentralen Begriffe der fast-überall-, fast gleichmäßigen, Maß- und $\mathcal{L}_p$-Konvergenz bewiesen haben. Dabei bedeutet ein durchgezogener Pfeil, dass aus Konvergenz im Sinne A die im Sinne B folgt. Ein unterbrochener Pfeil dagegen bedeutet, dass sich aus Konvergenz im Sinne A die Existenz einer Teilfolge ergibt, welche im Sinne B konvergiert. Unter "Dominanzbedingung" verstehen wir hier die Existenz einer Funktion g, z. B. wie in Satz 4.2.4. Beachte, dass sich manche der Pfeile als zutreffend ergeben, wenn man anderen Pfeilen (an denen die Nummer des Satzes bzw. Lemmas steht, in welchem das entsprechende Resultat zu finden ist) folgt. Daher haben wir diese Implikationen nicht als Satz oder Lemma formuliert!

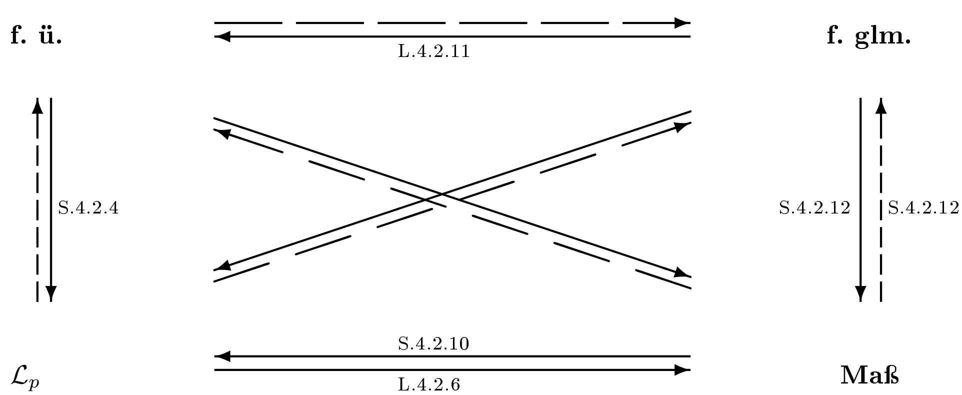
(A) Der allgemeine Fall:



(B) Bei endlichem Maßraum:



(C) Mit Dominanzbedingung:



4.4 Zerlegungssätze für signierte Maße

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A})$ immer ein gegebener messbarer Raum, auf dem aber nicht unbedingt ein Maß definiert sein muss.

Definition 4.4.1 *Eine Abbildung* $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *heißt eine* sigma-additive Mengenfunktion, *oder auch* signiertes Maß, *oder* Ladung, *wenn sie das Axiom* (M3) *– mit* λ *an Stelle von* μ *– der Sigma-Additivität* *erfüllt. Da die Vereinigung von Mengen von deren Numerierung unabhängig ist, folgt die unbedingte und damit auch die absolute Konvergenz der rechtsstehenden Reihe – dies ist nicht selbstverständlich, da die Zahlen $\lambda(A_n)$ auch negativ sein können. Beachte, dass $A_n = \emptyset$ auch zugelassen ist, und daher folgt leicht dass für jede Ladung gelten muss $\lambda(\emptyset) = 0$. Falls eine Ladung gegeben ist, heißt eine Menge $A \in \mathcal{A}$* positiv *bzw.* negativ*, wenn gilt*

$$\lambda(E \cap A) \;\geq\; 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda(E \cap A) \;\leq\; 0 \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}\,.$$

Diese Definition ist offenbar dazu äquivalent dass für alle messbaren Teilmengen $E \subset A$ gilt $\lambda(E) \geq 0$ bzw. $\lambda(E) \geq 0$. Mengen, welche gleichzeitig positiv und negativ sind, heißen Nullmengen*.*

Aufgabe 4.4.2 *Zeige dass die Differenz zweier endlicher Maße immer eine Ladung ist, und dass eine Ladung genau dann ein Maß ist, wenn Ω eine positive Menge ist. Zeige weiter, dass eine Ladung im Allgemeinen nicht subadditiv, aber immer stetig im Sinne von* Lemma 1.6.8 *ist. Zeige schließlich noch: Wenn $A, B \in \mathcal{A}$ sind, und wenn $B \subset A$ ist, dann gilt $\lambda(A \setminus B) = \lambda(A) - \lambda(B)$.*

Behauptung 4.4.3 *Jede messbare Teilmenge von positiven Mengen ist positiv. Die Vereinigung abzählbar vieler positiver Mengen ist ebenfalls positiv. Gleiches gilt sinngemäß auch für negative Mengen.*

Beweis: Seien $A, B \in \mathcal{A}$, sei $B \subset A$, und sei A positiv. Dann ist für jedes $E \in \mathcal{A}$: $B \cap E = A \cap \tilde{E}$ mit $\tilde{E} = B \cap E \in \mathcal{A}$, und daher folgt $\lambda(B \cap E) \geq 0$. Seien jetzt $P_n \in \mathcal{A}$ positiv, und seien $Q_n = P_n \setminus (\cup_1^{n-1} P_n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Q_n ebenfalls positiv, paarweise disjunkt, und $\cup_1^n P_m = \cup_1^n Q_m$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus der Sigma-Additivität folgt deshalb

$$\lambda\Big(\bigcup_{m=1}^{n} P_m \Big) \;=\; \lambda\Big(\bigcup_{m=1}^{n} Q_m \Big) \;=\; \sum_{m=1}^{n} \lambda(Q_m) \;\geq\; 0\,,$$

und für $n \to \infty$ folgt die Behauptung mit der obigen Aufgabe. □

Satz 4.4.4 (Zerlegungssatz von Hahn) *Zu jeder Ladung λ gibt es eine Zerlegung von Ω in eine positive Menge P und eine negative Menge N.*

Beweis: Sei $\alpha = \sup \lambda(P)$, genommen über alle positiven Mengen P. Dann gibt es nach Definition des Supremums eine Folge von positiven Mengen P_n, für welche $\lambda(P_n)$ gegen α konvergiert. Aus der obigen Behauptung folgt dass $P := \cup P_n$ ebenfalls positiv ist, und man kann mit Hilfe der Stetigkeit der Ladung λ leicht zeigen, dass $\alpha = \lambda(P)$ ist. Falls $N := P^c$ nicht negativ wäre, gäbe es ein $E \in \mathcal{A}$ mit $E \subset N$ und $\lambda(E) > 0$. Die Menge E kann aber nicht positiv sein, denn sonst wäre $P \cup E$ ebenfalls positiv, und wegen $\lambda(P \cup E) = \lambda(P) + \lambda(E) > \alpha$ ist dies nicht möglich. Also muss eine messbare Teilmenge $\tilde{E}$ von E existieren mit $\lambda(\tilde{E}) < 0$. Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ minimal gewählt, so dass ein messbares $E_1 \subset E$ existiert mit $\lambda(E_1) \leq -1/n_1$. Wir nehmen jetzt an, dass wir für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits messbare Mengen $E_1, \ldots, E_k$ gewählt haben, die paarweise disjunkte Teilmengen von E sind, und für die gilt

$$\lambda\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{k} E_j\Big) \;>\; \lambda(E)\;(>\;0)\,.$$

Dies ist richtig für $k = 1$, weil $\lambda(E \setminus E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1)$ ist. Wie oben folgt dann dass auch $E \setminus \cup_1^k E_j$ nicht positiv sein kann, und daher können wir $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ minimal wählen, so dass eine messbare Teilmenge $E_{k+1} \subset E \setminus \cup_1^k E_j$ existiert mit $\lambda(E_{k+1}) \leq -1/n_{k+1}$. Für $F := \cup_1^\infty E_k$ folgt dann

$$\lambda(F) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) \;\leq\; -\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k \;\leq\; 0\,,$$

woraus $n_k \to \infty$ folgt, da λ nur endliche Werte annimmt. Falls es ein messbares $G \subset E \setminus F$ mit $\lambda(G) < 0$ gäbe, hätte man dieses G bei der Wahl der F_k zu jedem dieser Mengen hinzufügen können, und daraus würde für große k ein Widerspruch zur Minimalität der Zahlen n_k folgen. Also muss $E \setminus F$ positiv sein, und dies ergibt erneut einen Widerspruch zur Wahl von λ. Daher folgt die Negativität von N, was zu zeigen war. $\square$

Definition 4.4.5 *Sei eine Ladung λ gegeben. Jedes Paar (P, N) einer positiven und einer negativen Menge mit $\Omega = P \cup N$ und $P \cap N = \emptyset$ heißt eine Hahnsche Zerlegung. Im Allgemeinen sind allerdings P und N nicht eindeutig bestimmt. Durch*

$$\lambda^+(E) \;=\; \lambda(P \cap E)\,, \qquad \lambda^-(E) \;=\; -\lambda(N \cap E) \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

werden offenbar zwei endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert, für welche $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ ist. Im nächsten Lemma ergibt sich, dass das Paar (λ^+, λ^-), im Gegensatz zu (P, N), eindeutig festgelegt ist, und wir nennen λ^+ die positive bzw. λ^- die negative Variation *von λ. Das endliche Maß $|\lambda| := \lambda^+ + \lambda^-$ heißt die* Totalvariation *von λ.*

Aufgabe 4.4.6 *Zeige dass für alle $E \in \mathcal{A}$ gilt $|\lambda(E)| \le |\lambda|(E)$.*

Lemma 4.4.7 *Für zwei Hahnsche Zerlegungen (P_1, N_1) und (P_2, N_2) von Ω bezüglich derselben Ladung λ gilt immer*

$$\lambda(E \cap P_1) \;=\; \lambda(E \cap P_2)\,, \qquad \lambda(E \cap N_1) \;=\; \lambda(E \cap N_2) \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}\,.$$

Also sind $\lambda^\pm$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung,

Beweis: Es ist $E \cap (P_1 \setminus P_2) \subset P_1 \cap N_2$, und daher ist $E \cap (P_1 \setminus P_2)$ eine Nullmenge. Daher gilt

$$\lambda(E \cap P_1) \;=\; \lambda(E \cap P_2 \cap P_1) \;+\; \lambda(E \cap (P_1 \setminus P_2)) \;=\; \lambda(E \cap P_2 \cap P_1)\,.$$

Durch Vertauschen der Bezeichnungen folgt aber auch $\lambda(E \cap P_2) = \lambda(E \cap P_2 \cap P_1)$, und durch Übergang zu $-\lambda$ folgt dann $\lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)$. $\square$

Lemma 4.4.8 *Die Totalvariation $|\lambda|$ hat die folgende Eigenschaft: Für alle $E \in \mathcal{A}$ ist*

$$|\lambda|(E) \;=\; \sup\,\Big\{\, \sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_j)| \;:\quad E_j \in \mathcal{A} \text{ sind eine Zerlegung von } E \,\Big\}\,.$$

Beweis: Seien $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ eine Zerlegung von E, dann folgt (da $|\lambda|$ ein Maß ist) $\sum_j |\lambda(E_j)| \le \sum_j |\lambda|(E_j) \le |\lambda|(E)$. Für die spezielle Zerlegung $E_1 = E \cap P$ und $E_2 = E \cap N$ folgt aber $|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E) = \lambda(E_1) - \lambda(E_2) = |\lambda(E_1)| + |\lambda(E_2)|$, und daher gilt die Behauptung. $\square$

Satz 4.4.9 (Jordanscher Zerlegungssatz) *Seien μ und ν zwei endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $\lambda = \mu - \nu$. Dann ist λ eine Ladung, und es gilt*

$$\mu(E) \;\ge\; \lambda^+(E) \qquad \nu(E) \;\ge\; \lambda^-(E) \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}\,.$$

Beweis: Es ist $\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) = \mu(E \cap P) - \nu(E \cap P) \le \mu(E \cap P) \le \mu(E)$, und genauso folgt die zweite Ungleichung. $\square$

4.5 Integrale als Ladungen und Absolutstetigkeit

Lemma 4.5.1 *Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann wird durch*

$$\lambda_f(E) \;=\; \int_E f\, d\mu \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

eine Ladung definiert, und es gilt

$$\lambda_f^{\pm}(E) \;=\; \lambda_{f^\pm}(E) \;=\; \int_E f^{\pm}\, d\mu\,, \qquad |\lambda|(E) \;=\; \lambda_{|f|}(E) \;=\; \int_E |f|\, d\mu \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}\,.$$

Beweis: Seien $P_f = \{f(\omega) \geq 0\}$ und $N_f = \{f(\omega) < 0\}$. Dann bilden P_f und N_f eine Zerlegung von Ω, und für $E \in \mathcal{A}$ gilt $\lambda_f(E \cap P_f) \geq 0$, $\lambda_f(E \cap N_f) \leq 0$. Also sind diese Mengen eine Hahnsche Zerlegung von Ω. Die übrigen Aussagen sind klar. □

Aufgabe 4.5.2 *Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und seien $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ so, dass $\lambda_f(E) = \lambda_g(E)$ ist für alle $E \in \mathcal{A}$. Zeige, dass dann $f(\omega) = g(\omega)$ μ–*f. ü.

Definition 4.5.3 *Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Eine Maß ν heißt* absolutstetig *bzgl. μ, falls für alle $E \in \mathcal{A}$ gilt: Aus $\mu(E) = 0$ folgt $\nu(E) = 0$. Eine Ladung λ heißt absolutstetig bzgl. μ, falls dies für ihre Totalvariation $|\lambda|$ gilt.*

Lemma 4.5.4 *Seien μ, ν zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Genau dann ist ν absolutstetig bzgl. μ, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, E \in \mathcal{A} \;:\quad \mu(E) \;<\; \delta \quad\Longrightarrow\quad \nu(E) \;<\; \varepsilon\,.$$

Beweis: Wenn die angegebene Bedingung erfüllt und $\mu(E) = 0$ ist, dann folgt $\nu(E) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, und daher gilt $\nu(E) = 0$. Wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $E_n \in \mathcal{A}$ existiert mit $\nu(E_n) \geq \varepsilon$ und $\mu(E_n) < 2^{-n}$. Wie im Beweis von Satz 4.2.9 folgt dass für $F = \cap_j \cup_{k \geq j} E_k$ gilt $\mu(F) = 0$. Dagegen ist $\nu(F) = \lim_j \nu(\cup_{k \geq j} E_k) \geq \limsup_k \nu(E_k) \geq \varepsilon$. Also ist ν nicht absolutstetig bzgl. μ. □

Satz 4.5.5 (Radon-Nikodym) *Seien μ, ν zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei μ sigma-endlich, und sei ν absolutstetig bzgl. μ. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ mit*

$$\nu(E) \;=\; \int_E f\, d\mu \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}\,,$$

*und dieses f ist μ–*f. ü. *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Aus Aufgabe 4.5.2 folgt dass f μ–f. ü. eindeutig ist. Um die Existenz zu zeigen, seien zunächst endliche Maße μ, ν betrachtet. Für jedes $\alpha > 0$ sei $\lambda_\alpha(E) = \nu(E) - \alpha\, \mu(E)$ für alle $E \in \mathcal{A}$. Dann ist λ_α eine Ladung, und wir wählen eine Hahnsche Zerlegung (P_α, N_α) von Ω. Jetzt sei α festgehalten und, beginnend mit $A_1 = N_\alpha$, definiert

$$A_k \;=\; N_{k\alpha} \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \Big) \qquad \forall\, k \geq 2\,.$$

Die A_k sind paarweise disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_j \;=\; \bigcup_{j=1}^{k} N_{j\alpha}\,, \qquad A_k \;=\; N_{k\alpha} \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} N_{j\alpha} \Big) \;=\; N_{k\alpha} \,\cap\, \Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} P_{j\alpha} \Big) \qquad \forall\, k \geq 1\,.$$

Für jede messbare Teilmenge E von A_k gilt daher $E \subset N_{k\alpha} \cap P_{(k-1)\alpha}$, und daher folgt $\nu(E) - k\,\alpha\,\mu(E) \leq 0$, aber $\nu(E) - (k-1)\,\alpha\,\mu(E) \geq 0$, also

$$(k-1)\,\alpha\,\mu(E) \;\leq\; \nu(E) \leq k\,\alpha\;\mu(E)\,.$$

Für $B := (\cup_1^\infty A_j)^c = \cap_1^\infty P_{j\alpha}$ folgt wegen $B \subset P_{k\alpha}$ also $0 \leq k\,\alpha\,\mu(B) \leq \nu(B)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was nur sein kann, wenn $\mu(B) = 0$ ist, und wegen der Absolutstetigkeit ist dann auch $\nu(B) = 0$. Für beliebiges $E \in \mathcal{A}$ bilden die Mengen $(E \cap B)$ und $(E \cap A_k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung, und daher folgt mit den obigen Ungleichungen

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\,\mu(E \cap A_k) \;\leq\; \nu(E) \;=\; \nu(E \cap B) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap A_k) \;\leq\; \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mu(E \cap A_k)\,.$$

Wir definieren nun

$$f_\alpha(\omega) \;=\; \begin{cases} (k-1)\,\alpha & (\omega \in A_k) \\ 0 & (\omega \in B) \end{cases}$$

und schließen mit der Sigma-Additivität des Integrals aus der letzten Ungleichungskette

$$\int_E f_\alpha\,d\mu \;\leq\; \nu(E) \;\leq\; \int_E f_\alpha\,d\mu \;+\; \alpha\,\mu(\Omega)\,.$$

Wenn wir nun $\alpha = 2^{-n}$ setzen und die Funktion $f\alpha$ in f_n umbenennen, folgen für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ die neuen Ungleichungen

$$\int_E f_n\,d\mu \;\leq\; \nu(E) \;\leq\; \int_E f_m\,d\mu \;+\; 2^{-m}\,\mu(\Omega)\,.$$

Durch Vertauschen von n und m erhalten wir eine weitere solche Ungleichungskette, und dann folgt für $m \geq n$, dass

$$\Big| \int_E (f_n - f_m)\,d\mu \Big| \;\leq\; 2^{-n}\,\mu(\Omega)$$

gilt. Da dies für alle E gilt, ist (f_n) eine Cauchyfolge im Sinne der 1-Norm, und konvergiert nach Satz 4.1.8 gegen ein $f \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann folgt aber durch Grenzübergang $n \to \infty$ die behauptete Darstellung von $\nu(E)$. Als nächstes sei μ endlich, während $\nu(\Omega) = \infty$ sei.Wir setzen

$$\alpha \;:=\; \sup_{\nu(B) < \infty} \mu(B)\,.$$

Dann existiert eine aufsteigende Mengenfolge $(B_n)_1^\infty$ so, dass $\alpha = \lim_n \mu(B_n)$ ist. Mit der Stetigkeit von Maßen folgt dass $\mu(B) = \alpha$ ist, für $B := \cup B_n$. Sei nun $\Omega_0 := B^c = \cap B_n^c$, $\Omega_1 := B_1$, $\Omega_n := B_n \setminus B_{n-1}$, $n \geq 2$. Dann bilden die Ω_m eine Zerlegung von Ω mit folgenden Eigenschaften:

- Wenn A eine messbare Teilmenge von Ω_0 mit $\nu(A) < \infty$ ist, dann folgt aus der Definition von α dass $\nu(A) = 0$ sein muss. Also nimmt ν auf Ω_0 nur die beiden Werte 0 und ∞ an!
- Nach Konstruktion ist $\nu(\Omega_m) < \infty$ für $m \geq 1$.

Aus dem ersten Teil des Beweises folgt deshalb für $m \geq 1$ die Existenz von Funktionen f_m, welche auf Ω_m definiert sind und für die die Darstellungsformel

$$\nu(E) \;=\; \int_E f_m\,d\mu \qquad \forall\, E \in \mathcal{A} \quad \text{mit} \quad E \subset \Omega_m$$

gilt. Setzt man noch $f_0(\omega) = \infty$ für $\omega \in \Omega_0$, so gilt dasselbe auch für $m = 0$. Durch "Zusammensetzen" definieren wir dann $f(\omega) = f_m(\omega)$ für $\omega \in \Omega_m$ und erhalten durch die Sigma-Additivität des Integrals die Behauptung des Satzes für diesen Fall. Sei jetzt abschließend μ sigma-endlich. Dann gibt es Mengen $E_n \in \mathcal{A}$ mit $E_n \subset E_{n+1}$, $\nu(E_n) + \mu(E_n) < \infty$ und $\Omega = \cup E_n$. Wie bereits bewiesen existieren Funktionen $f_n \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$, die außerhalb von E_n verschwinden sollen, so dass für $E \subset E_n$ gilt $\nu(E) = \int_E f_n \, d\mu$. Die Folge (f_n) ist monoton wachsend und strebt daher gegen eine messbare Funktion f, und nach dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\forall\ E \in \mathcal{A}\ : \qquad \int_E f_n \, d\mu \ = \ \int_{E \cap E_n} f_n \, d\mu \ \to \ \int_E f \, d\mu \qquad (n \to \infty)\,.$$

Daraus folgt die Behauptung mit Hilfe der Stetigkeit des Maßes. □

Definition 4.5.6 *Zwei Maße μ, ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heißen* zueinander singulär*, falls es eine Zerlegung von Ω in zwei messbare Mengen A und B gibt mit $\nu(A) = \mu(B) = 0$.*

Aufgabe 4.5.7 *Seien μ, ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ zueinander singulär. Zeige: Wenn ν absolutstetig bzl. μ ist, dann folgt $\nu(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{A}$.*

Satz 4.5.8 (Lebesguescher Zerlegungssatz) *Seien μ, ν zwei sigma-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Maße ν_1, ν_1 mit $\nu = \nu_1 + \nu_2$ so, dass ν_2 absolutstetig bzgl. μ ist, während ν_1 und μ zueinander singulär sind.*

Beweis: Nach Aufgabe 1.6.4 ist $\sigma = \nu + \mu$ ebenfalls ein sigma-endliches Maß, und ν und μ sind offenbar beide absolutstetig bzgl. σ. Daher existieren nach dem Satz von Radon-Nikodym zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$\nu(E) \ = \ \int_E f \, d\sigma\,, \qquad \mu(E) \ = \ \int_E g \, d\sigma \qquad \forall\ E \in \mathcal{A}\,.$$

Die Mengen $A = \{g(\omega) = 0\}$ und $B = \{g(\omega) > 0\}$ sind messbar und bilden eine Zerlegung von Ω, und wir setzen

$$\nu_1(E) \ = \ \nu(E \cap A)\,, \qquad \nu_2(E) \ = \ \nu(E \cap B) \qquad \forall\ E \in \mathcal{A}\,.$$

Dann ist $\nu_1(B) = \nu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) = \int_A g \, d\sigma = 0$, und deshalb sind ν_1 und μ zueinander singulär. Aus $\mu(E) = 0$ folgt dass $g(\omega) = 0$ σ–f. ü. auf E ist, und daher ist $\sigma(E \cap B) = 0$. Wegen der Absolutstetigkeit von ν bzgl. σ folgt also $\nu(E \cap B) = 0$, und daher ist $\nu_2(E) = 0$. Seien jetzt ν_1, ν_2 und τ_1, τ_2 Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \tau_1 + \tau_2$, so dass ν_2 und τ_2 absolutstetig bzgl. μ sind, während ν_2 und μ, sowie τ_2 und μ zueinander singulär sind. Seien $E_n \subset E_{n+1}$ so, dass $\sigma(E_n) < \infty$ und $\cup_n E_n = \Omega$ ist. Dann wird durch $\lambda := \nu_1 - \tau_1 = \tau_2 - \nu_2$ eine Ladung auf jedem der Maßräume $(E_n, \mathcal{A}_n)$ definiert, wobei die Sigma-Algebra $\mathcal{A}_n$ aus alle messbaren Teilmengen von E_n besteht, und nach dem Jordanschen Zerlegungssatz folgt für alle $E \subset E_n$, dass $\lambda^+(E) \le \tau_2(E)$ und $\lambda^-(E) \le \nu_2(E)$, also $|\lambda|(E) \le v_2(E) + \tau_2(E)$ ist. Also ist $|\lambda|$ absolutstetig bzgl. μ. Analog folgt auch $|\lambda|(E) \le v_1(E) + \tau_1(E)$, und per Definition von singulären Maßen gibt es Zerlegungen von E_n in Mengen A, B bzw. C, D so, dass $\nu_1(A) = \tau_1(C) = \mu(B) = \mu(D) = 0$ gilt. Die Mengen $B \cup D$ und $F := E_n \setminus (B \cup D)$ sind ebenfalls eine Zerlegung von E_n, und $\mu(B \cup D) = 0$, sowie $\nu_1(F) = \tau_1(F) = 0$, denn $F \subset A \cup C$. Also sind $|\lambda|$ und μ zueinander singulär, und daher folgt aus Aufgabe 4.5.7 dass $|\lambda|(E) = 0$ ist für alle $E \subset E_n$, und da n beliebig ist, folgt dasselbe für alle $E \in \mathcal{A}$. Somit ist $\nu_1 = \tau_1$, woraus die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt. □

4.6 Produkte unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsräume

Kartesische Produkte von unendlich vielen Maßräumen sind im Allgemeinen nicht sinnvoll definierbar. Anders ist es aber, wenn wir Wahrscheinlichkeitsräume betrachten, und diese Produkte sind in der Wahrscheinlichkeitstheorie auch von großer Bedeutung. Deshalb betrachten wir im Folgenden, analog wie im

Buch von *H. Bauer* [4, § 9], eine unendliche Indexmenge I sowie eine Familie $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, p_i)_{i\in I}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen. Für jede nichtleere Teilmenge $K \subset I$ ist dann nach Definition

$$\Omega^K \;:=\; \prod_{i\in K} \Omega_i$$

die Menge aller Abbildungen ω von K nach der Vereinigung aller Ω_i, wobei immer $\omega(i) \in \Omega_i$ ist. Wenn J eine nichtleere Teilmenge von K ist, können wir jedem $\omega \in \Omega^K$ seine Restriktion auf J zuordnen – die so definierte Abbildung heißt *die Projektion* P_J^K von Ω^K auf Ω^J. Wenn $K = I$ ist, schreiben wir auch kurz $\Omega = \Omega^I$ bzw. $P_J = P_J^K$. Falls J nur ein Element i enthält, wollen wir auch P_i^K für die zugehörige Projektion schreiben.

Aufgabe 4.6.1 *Zeige für Teilmengen $J \subset K \subset L \subset I$ die Gleichungen*

$$P_J^L \;=\; P_J^K \circ P_K^L\,, \qquad P_J \;=\; \mathcal{P}_J^K \circ P_K\,.$$

Definition 4.6.2 *Mit $\mathcal{H}(I)$ bezeichnen wir die Familie aller* endlichen Teilmengen *von I. Ein kartesisches Produkt von Mengen $A_i \in \mathcal{A}_i$ heißt* eine Zylindermenge, *falls gilt $A_i = \Omega_i$ bis auf höchstens endlich viele $i \in I$. Die von allen Zylindermengen erzeugte Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* das Produkt *der $\mathcal{A}_i$, $i \in I$. Wir schreiben auch*

$$\mathcal{A} \;:=\; \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i\,.$$

Aufgabe 4.6.3 *Zeige: Eine Menge $A \subset \Omega$ ist genau dann eine Zylindermenge, falls es ein $K \in \mathcal{H}(I)$ und Mengen $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in K$, gibt, so dass*

$$A = P_K^{-1}\big(\prod_{i\in K} A_i\big) \;=\; \bigcap_{i\in K} P_i^{-1}(A_i)\,.$$

Zeige weiter: Das Produkt $\mathcal{A}$ ist die kleinste Sigma-Algebra auf Ω, bezüglich der alle Projektionen P_i, $i \in I$, messbar sind, und auch die P_K mit $K \in \mathcal{H}(I)$ sind alle messbar bezüglich $\mathcal{A}$.

Aufgabe 4.6.4 *Zeige dass die Menge der Vereinigungen endlich vieler Zylindermengen eine Algebra $\mathcal{F}$ ist, und dass es auf $\mathcal{F}$ genau ein Prämaß p gibt mit*

$$p\big(\prod_{i\in I} A_i\big) \;=\; \prod_{i\in I} p_i(A_i)$$

für alle Zylindermengen $\prod_{i\in I} A_i$, $A_i \in \mathcal{A}_i$. **Anleitung:** *Zeige zunächst, dass es zu endlich vielen Mengen $A_k \in \mathcal{F}$ ein $K \in \mathcal{H}(I)$ gibt, für welches gilt $P_i(A_k) = \Omega_i$ für alle k und alle $i \notin K$. Gehe dann genauso vor wie bei der Untersuchung des Produktes endlich vieler Algebren bzw. Maße in* Abschnitt 3.4. *Beachte auch, dass für Zylindermengen immer gilt $p_i(A_i) = 1$ bis auf endlich viele $i \in I$.*

Mit Hilfe der letzten Aufgabe zeigen wir jetzt:

Satz 4.6.5 *Auf der von allen Zylindermengen erzeugten Sigma-Algebra $\mathcal{A}$ gibt es genau ein Maß, welches das oben definierte Prämaß fortsetzt, und dieses Maß ist sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Beweis: Folgt mit Hilfe von Aufgabe 4.6.4 aus den Sätzen von Carathéodory und Hahn. $\square$

Index