Bemerkungen zur Maßtheorie

von Markus Haase

Vorläufige Version
22. März 2004

Adresse des Autors: Abt. Angewandte Analysis
Helmholtzstraße 18
89069 Ulm

e-mail: haase@mathematik.uni-ulm.de

Vorwort

Die vorliegenden *Bemerkungen zur Maßtheorie* entstanden wie so oft bei mir als "Abfallprodukt". Eigentlich wollte ich etwas über Operatoren auf $\mathbf{L^p}$-Räumen lernen; dabei stieß ich auf die Methode der Maximaloperatoren (siehe [Gra]) und ihrer Anwendung zur punktweisen Konvergenz fast überall. Kurz gesagt geht es um folgendes: Hat man eine Familie $(T_\alpha)_\alpha$ von linearen Operatoren $T_\alpha : \mathbf{L^p}(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega', \nu)/\sim$ gegeben, so ist

$$T^* f(x) := \sup_\alpha |T_\alpha f|$$

der zugehörige Maximaloperator. Leider verlor meine Referenzliteratur kein Sterbenswörtchen darüber, wie man den Maximaloperator T^* überhaupt definieren soll, wenn die Familie überabzählbar ist und für jedes f die "Funktion" $T_\alpha f$ eigentlich eine Äquivalenzklasse von Funktionen (bzgl. Gleichheit ν-fast überall) ist. Damit nicht genug wird die obige Definition u.a. dazu verwendet, gewisse punktweise Konvergenzen von (i.a. überabzählbaren Netzen) zu beweisen. Als Beispiel nenne ich nur die Aussage, dass für jedes $f \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d)$ die Konvergenz

$$G_t * f(x) \to f(x) \quad (t \to 0)$$

punktweise fast überall gilt. (Hier ist $(G_t)_t$ die aus dem Gaußkern produzierte approximative Eins.) Zugestanden, die Funktionen $G_t * f$ sind stetig und also macht alles Sinn, aber die Stetigkeit scheint hier eher ein kontingentes Faktum zu sein. (Man ersetze $(G_t)_t$ durch eine allgemeinere approximative Eins.) Auch hat das betrachtete Netz "kofinale Teilfolgen", was eine *ad hoc*-Lösung ermöglicht.
Allerdings schrie das Problem nach allgemeiner Behandlung und so ersann ich mir eine Lösung, Definitionen, die Sinn machen und die das zu beweisen erlauben, was man erwartet. Dabei wurde alles meinem Naturell entsprechend immer grundsätzlicher und allgemeiner, und nun kann ich dem Leser stolz meine Sicht auf die "höhere" Maßtheorie präsentieren. Inhaltlich setze ich die drei folgenden Kapitel aus der "elementaren" Maßtheorie voraus:

1) Maße und σ-Algebren (Ringe, Erzeuger, Dynkinsystem oder monotone Klassen) aber nicht: Fortsetzungssatz von Hahn oder irgendwelche Existenzsätze für Maße. Siehe dazu [Bar] oder [Bau].
2) Die Konstruktion und elementare Eigenschaften des Integrals für positive messbare Funktionen, wie etwa in [Haa, §2] aufgelistet. Das Konzept von "Gleichheit fast überall".
3) Die Konstruktion des Produktmaßes zweier σ-endlicher Maßräume einschließlich des Satzes von Tonelli (nicht: Fubini), wie etwa in [Bau].

Ich weise ausdrücklich darauf hin, dass keine weitere Integrationstheorie benötigt wird. Die $\mathbf{L^p}$-Räume werden in Abschnitt 7 eingeführt, der Satz von Fubini ist ein Korollar zu den Ausführungen in Abschnitt 8. Aus der topologischen Maßtheorie kommt nur der Begriff des von innen regulären Maßes vor. Siehe [Haa, §12] für ein paar Hintergrundinformationen.

Bei der Entwicklung der Begriffe zeigte es sich, dass man sich eine Menge Ärger spart, wenn man nur σ-endiche Maßräume betrachtet. Gewisse Einschränkungen an das Maß muß man aus der Sicht der Funktionalanalysis sowieso machen und spätestens bei Produkten ist man bei Σ-Endlichkeit anglangt. Was mich am Ende noch mehr überzeugt hat, ist die Tatsache, dass bei σ-endlichem Raum (Ω, μ) und vollständig metrischem Raum E der Raum $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ (siehe Abschnitt 4) mit der Konvergenz (lokal) im Maß wieder ein vollständig metrischer Raum wird (Satz 4.1). Darum hier die Generalkonvention:

Alle Maßräume werden als σ-endlich vorausgesetzt.

Um dieses Faktum beizeiten in Erinnerung zu rufen habe ich mir erlaubt, diese Annahme ab und zu in Formulierungen der Sätze zu explizieren.

Nun noch eine Warnung zum Schluß. Natürlich freut es mich, wenn jemand meine Machwerke liest, ich wünsche es mir sogar. Ich fürchte jedoch, dass ich auch viel Unmut auf mich ziehen werde, denn ein maßtheoretisch unbedarfter Leser wird eher Schwierigkeiten haben, dem Text zu folgen. Da es sich wieder mal um eine "Selbstvergewisserung" handelt, habe ich den Schwerpunkt einmal mehr auf Systematik statt auf Didaktik gelegt. Ein bisschen Topologie (metrische Räume, Netze, siehe [Que]) ist im Text mehr oder weniger ständig präsent, ab und zu taucht etwas Funktionalanalysis (Banachräume, lineare Operatoren, siehe [Wer]) auf. In den letzten zwei Abschnitten benötigt man noch etwas Ordnungstheorie (vollständige Verbände). Das mag zunächst abschrecken, ist aber unterm Strich nicht wild. Die eigentliche Schwierigkeit liegt in der Maßtheorie.

Nur falls es jemand bemerkt: Am Ende habe ich hier doch weder Maximaloperatoren noch approximative Einsen behandelt. Das wird wohl in einer späteren "Selbstvergewisserung" geschehen.

Inhaltsverzeichnis

§1 Metrische Räume als Meßräume

Im ganzen Text bezeichnet stets (Ω, Σ, μ) einen σ-endlichen Maßraum und E einen vollständig metrischen Raum.

Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und (E, d) ein vollständiger metrischer Raum. Wir schreiben manchmal

$$|x - y| = d(x, y) \quad (x, y \in E)$$

ohne dabei die Existenz einer Norm oder eines Absolutbetrages unterstellen zu wollen. (Das Zeichen "$-$" hat hier keine algebraische Bedeutung (etwa: Differenz), sondern trennt wie ein Komma nur die Positionen von "x" und "y". Analoges gilt für die "Betragsstriche".) Häufig ist E sogar ein vollständig metrisierbarer Vektorraum, ein sogenannter **F-Raum**. Die Metrik kann dabei immer als translationsinvariant angenommen werden, siehe [Rud].

Auf E gibt es eine kanonische σ-Algebra, nämlich die von den offenen Mengen erzeugte. Sie heißt **Borel'sche** σ-Algebra und wird mit $\mathfrak{B}(E)$ bezeichnet.

Lemma 1.1. *Sei $A \subset E$ beliebig. Dann ist A selbst ein metrischer Raum, indem man die Metrik von E auf A einschränkt. Hierbei gilt $\mathfrak{B}(A) = A \cap \mathfrak{B}(E)$.*

Beweis. Es ist $\{A \cap O \mid O \text{ offen in E}\}$ das System der offenen Mengen von A. Dies liefert "$\subset$". Für die Umkehrung betrachte man das System $\{B \in \mathfrak{B}(E) \mid A \cap B \in \mathfrak{B}(A)\}$. Man zeigt leicht, dass dies eine σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen von E umfaßt. □

Eine Abbildung $f : \Omega \longrightarrow E$ heißt **messbar**, falls $f^{-1}(U) \in \Sigma$ für alle $U \in \mathfrak{B}(E)$ ist. Offensichtlich reicht es, dies für offene Mengen U zu fordern. Der folgende Satz ist fundamental.

Satz 1.2. *Sei $f_n : \Omega \longrightarrow E$ messbar und $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist auch $f : \Omega \longrightarrow E$ messbar.*

Beweis. Vgl. [Lan, p.117] □

Das nächste Ergebnis deutet bereits die wichtige Rolle an, die die Separabilität spielt. Dabei heißt der metrische Raum E separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Äquivalent dazu ist, dass die Topologie von E eine abzählbare Basis besitzt, vgl. [Que].

Satz 1.3. *Seien E, F separable metrische Räume. Dann ist*

$$\mathfrak{B}(E \times F) = \mathfrak{B}(E) \otimes \mathfrak{B}(F).$$

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ eine abzählbare Basis der Topologie von E und $\mathcal{F}$ eine ebensolche für F. Damit erzeugen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ die jeweiligen Borelalgebren. Außerdem ist dann $\{A \times B \mid A \in \mathcal{E},\, B \in \mathcal{F}\}$ sowohl eine (abzählbare) Basis der Topologie von $E \times F$ als auch ein Erzeuger von $\mathfrak{B}(E) \otimes \mathfrak{B}(F)$. □

Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{M}(\Omega,\mu;E) := \{f:\Omega \longrightarrow E \mid f \text{ ist messbar und } f(\Omega) \text{ ist separabel}\}$$

den Raum der **separabelwertigen**, messbaren Abbildungen von Ω nach E. Offensichtlich (mit Satz 1.2) ist dieser Raum abgeschlossen unter punktweiser Konvergenz von Folgen.

Lemma 1.4. *Seien $f,g \in \mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$. Dann ist die Funktion*

$$|f-g| := (x \longmapsto |f(x)-g(x)|) : \Omega \longrightarrow [0,\infty)$$

messbar. Falls E ein F-Raum ist, sind auch $f+g, \lambda f \in \mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$, d.h., $\mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$ ist auch ein Vektorraum.

Beweis. Sei $F := \overline{f(\Omega)\cup g(\Omega)}$. Dann ist F ein separabler metrischer Raum. Die Abbildung $((x,y)\longmapsto |x-y|) : F\times F \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, also $\mathfrak{B}(F)\otimes\mathfrak{B}(F)$-messbar nach Satz 1.3. Daraus folgt die Behauptung. Anlog beweist man den Rest. ☐

§2 Konvergenz global im Maß

In diesem Abschnitt konstruieren wir eine Halbmetrik auf $\mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$.
Für $f,g \in \mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$ und $A\in\Sigma$ setze

$$e_A(f,g) := \inf\big\{\varepsilon+\eta \mid \eta,\varepsilon>0,\ \mu\big((|f-g|>\eta)\cap A\big)<\varepsilon\big\} \ \in\ [0,\infty]$$

$$d_A(f,g) := \frac{e_A(f,g)}{1+e(f,g)} \quad \in\ [0,1].$$

Lemma 2.1. *Für jedes $A\subset\Omega$ ist d_A eine Halbmetrik auf $\mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$ mit*

$$d_A(f,g)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad f=g \quad \text{f.ü. auf } A.$$

Es gilt $\lim_{n,m\to\infty} d_A(f_n,g_m)=0$ genau dann, wenn

$$\mu(A\cap(|f_n-g_m|>t))\to 0 \quad (n,m\to\infty)$$

für alle $t>0$.

Beweis. Klar ist $d_A(f,g)=d_A(g,f)$. Wenn $f=g$ fü. auf A, so ist $\mu(A\cap(|f-g|>t))=0$ für alle $t>0$. Also ist $e_A(f,g)=0$ und damit auch $d_A(f,g)=0$. Sei umgekehrt $d_A(f,g)=0$. Dann ist $e_A(f,g)=0$. Sei $n>0$. Dann existieren $\varepsilon_n,\eta_n>0$ mit $\varepsilon_n+\eta_n<\frac{1}{n}$ und $\mu(A\cap(|f-g|>\eta_n))<\varepsilon_n$. Dabei kann man ohne Einschränkung $\eta_n\searrow$ annehmen. Nun ist $A\cap(|f-g|>\eta_n)\nearrow A\cap(|f-g|>0)$. Daraus folgt $\mu(A\cap(|f-g|>0)=0$.

Es bleibt, die Dreiecksungleichung zu zeigen. Bekanntermaßen gilt $\varphi(t+s)\le\varphi(t)+\varphi(s)$ mit $\varphi(t)=\frac{t}{t+1}$ für $t\in[0,\infty]$. Damit muss man die Dreiecksungleichung nur für e_A zeigen. Ohne Einschränkung ist $A=\Omega$. Seien also $f,g,h\in\mathcal{M}(\Omega,\mu;E)$. Wir wollen $e(f,g)\le e(f,h)+e(h,g)$ zeigen. O.B.d.A. sind beide Summanden rechts endlich. Seien $0<\alpha,\beta<\infty$ mit $e(f,h)<\alpha$ und $e(h,g)<\beta$. Dann gibt es $\varepsilon_1+\eta_1<\alpha, \varepsilon_2+\eta_2<\beta$ mit $\mu(|f-h|>\eta_1)<\varepsilon_1$ und $\mu(|g-h|>\eta_2)<\varepsilon_2$. Wegen $|f-g|\le|f-h|+|h-g|$ ist $(|f-g|>\eta_1+\eta_2)\subset(|f-h|>\eta_1)\cup(|h-g|>\eta_2)$ und darum

$$\mu(|f-g|>\eta_1+\eta_2)\le\mu(|f-h|>\eta_1)+(|h-g|>\eta_2)<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Deshalb ist $e(f,g)\le(\eta_1+\eta_2)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)<\alpha+\beta$.

Zum Beweis der letzten Behauptung kann man wieder ohne Einschränkung $A = \Omega$ annehmen. Sei $d_\Omega(f_n, g_m) \to 0$, $t, \delta > 0$. Dann ist $e_\Omega(f_n, g_m) \to 0$ also $e_\Omega(f_n, g_m) < \min(t, \delta)$ für $n, m \geq N$. Zu ebensolchen n, m findet sich jeweils (ε, η) mit $\mu(|f_n - g_m| > \eta) < \varepsilon$ und $\eta + \varepsilon < \min(t, \delta)$. Damit ist $\eta < t$, also $\mu(|f_n - g_m| > t) \leq \mu(|f_n - g_m| > \eta) < \varepsilon < \delta$. Insgesamt folgt $\mu(|f_n - f_m| > t) < \delta$ für alle $n, m \geq N$.

Sei umgekehrt $\mu(|f_n - g_m| > t) \to 0$ für alle $t > 0$. Sei $\delta > 0$ und N so dass $\mu(|f_n - g_m| > \frac{\delta}{2}) < \frac{\delta}{2}$ fúr $n, m \geq N$. Dann ist $e_\Omega(f_n, g_m) < \delta$ für $n, m \geq N$. □

Die Konvergenz in der (Halb-)Metrik d_Ω heißt **globale Konvergenz im Maß** μ.

Satz 2.2. *Die Halbmetrik d_Ω auf $\mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$ ist vollständig (weil E vollständig ist). Ist $f_n \to f$ global im Maß, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ die punktweise fast überall gegen f konvergiert.*

Beweis. Wir beweisen beide Behauptungen in einem Zug. Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge global im Maß. Induktiv wählt man eine Teilfolge $(g_k)_k$ mit $\mu(|g_k - g_{k+1}| > 2^{-k}) < 2^{-k}$. Man setzt $A_k := \{|g_k - g_{k+1}| > 2^{-k}\}$, $F_m := \bigcup_{k \geq m} A_k$, und $A := \bigcap_m F_m$. Dann ist $\mu(A_k) < 2^{-k}$, $\mu(F_m) \leq \sum_{m \geq k} 2^{-k} = 2^{-(m-1)}$ und $\mu(A) = 0$.

Behauptung: $(g_k)_k$ konvergiert auf $\Omega \setminus A$

Für $x \notin A$ gibt es m mit $x \notin F_m$. Das bedeutet $x \notin A_k$ für *alle* $k \geq m$. Also $|g_k(x) - g_{k+1}(x)| \leq 2^{-k}$ für alle $k \geq m$. Damit ist $(g_k(x))_k$ eine Cauchyfolge, also konvergent gegen ein $g(x)$. Insgesamt folgt $g_k \to g$ fast überall.

Behauptung: $g_k \to g$ global im Maß.

Sei $x \notin F_m$. Dann wie oben $|g_k(x) - g_{k+1}(x)| \leq 2^{-k}$ für alle $k \geq m$. Somit $|g_{m+k+1}(x) - g_m(x)| \leq \sum_{j=m}^{m+k} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq \sum_{j=m}^{m+k} 2^{-j} \leq 2^{-(m-1)}$. Mit $k \to \infty$ folgt dann $|g(x) - g_m(x)| \leq 2^{-(m-1)}$.

Wir haben also $\Omega \setminus F_m \subset \{|g - g_m| \leq \frac{1}{2^{m-1}}\}$. Dies impliziert $\{|g - g_m| > \frac{1}{2^{m-1}}\} \subset F_m$, d.h. $\mu(|g - g_m| > t) < 2^{-(m-1)}$ wenn $2^{-(m-1)} < t$.

Behauptung: $f_n \to g$ global im Maß.

Die g_k waren eine Teilfolge von (f_n), also $g_k = f_{n_k}$. Sei $t > 0$. Dann $\mu\,|f_n - g| > t) \leq \mu(|f_n - f_{n_k}| > t/2) + \mu(|g_k - g| > t/2)$.

Damit gilt $g = f$ fast überall und die Behauptungen sind bewiesen. □

Bemerkung 2.3. Sei E ein F-Raum. Dann ist die (Halb-)Metrik d_Ω auch translationsinvariant. Darüberhinaus ist die Additionsabbildung

$$((f, g) \longrightarrow f + g) : \mathcal{M}(\Omega, \mu; E) \times \mathcal{M}(\Omega, \mu; E) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$$

stetig, wegen $\mu(|(f + g) - 0| > 2t) \leq \mu(|f - 0| > t) + \mu(|g - 0| > t)$. Allerdings erhält man *keinen* topologischen Vektorraum, weil i.A. die skalare Multiplikation nicht stetig ist: Wenn es etwa eine disjunkte Zerlegung $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ gibt mit $\mu(\Omega_n) = \infty$ für jedes n, so definiere $f = n$ auf Ω_n. dann $\frac{1}{n} f \not\to 0$ global im Maß. Dieser Nachteil wird bei der in Abschnitt 4 diskutierten Konvergenz lokal im Maß vermieden.

§ 3 Fast gleichmäßige Konvergenz

Eine Folge $(f_n)_n \subset \mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$ heißt **fast gleichmäßig konvergent** gegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$, wenn zu jedem $\delta > 0$ ein $A_\delta \in \Sigma$ existiert mit $\mu(A_\delta) < \delta$ und

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \notin A_\delta\} \to 0.$$

Satz 3.1. *Sei $f_n, f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$. Wenn $f_n \to f$ fast gleichmäßig, dann $f_n \to f$ global im Maß und fast überall. Ist umgekehrt $f_n \to f$ global im Maß, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $f_{n_k} \to f$ fast gleichmäßig.*

Beweis. Die fast überall-Konvergenz ist klar. Sei $t > 0, \varepsilon > 0$. Dann gibt es N mit $|f_n - f| \leq t$ außerhalb von A_ε für alle $n \geq N$. Das bedeutet $\{|f_n - f| > t\} \subset A_\varepsilon$, also $\mu(|f_n - f| > t) < \varepsilon$ für $n \geq N$. Die zweite Behauptung folgt aus dem Beweis von Satz 2.2: für m_0 so groß, dass $2^{1-0} < \delta$ ist, setze man $A_\delta := F_{m_0}$. Man hat dann $|g_m - g| \leq 2^{1-m}$ auf $\Omega \setminus F_{m_0}$ für alle $m \geq m_0$. ☐

Folgerung 3.2. *Sei $(f_n)_n \subset \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, E)$. Genau dann ist $(f_n)_n$ konvergent global im Maß μ, wenn jede Teilfolge eine Teilfolge besitzt, die fast gleichmäßig konvergent ist.*

Beweis. Sei $f_n \to f$ global im Maß. Jede Teilfolge ist damit auch global im Maß gegen f konvergent, hat also nach Satz 3.1 eine fast gleichmäßig konvergente Teilfolge.
Zum Beweis der Umkehrung nehmen wir an dass $(f_n)_n$ nicht global im Maß konvergent ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge ist $d_\Omega(f_n, f_{n+1}) \geq \varepsilon$ für alle n. Wiederum eine Teilfolge davon konvergiert fast gleichmäßig also auch global im Maß nach Satz 3.1. Widerspruch! ☐

Für endliche Maßräume hat man den folgenden, sehr wichtigen Satz.

Satz 3.3. (Egoroff)
Sei (Ω, μ) ein endlicher *Maßraum, $f_n, f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu, E)$. Dann gilt*

$$f_n \to f \quad \textit{punktweise f.ü.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \to f \quad \textit{fast gleichmäßig.}$$

Beweis. Sei $f_n \to f$ punktweise fast überall, und sei $\delta > 0$. Setze $A_{k,m} := \{|f_k - f| \geq \frac{1}{m}\}$ und $F_{n,m} := \bigcup_{k \geq n} A_{k,m}$. Dann ist $\bigcap_n F_{n,m} = \bigcap_n \bigcup_{n \geq k} \{|f_k - f| \geq \frac{1}{m}\}$ eine Nullmenge. Man findet daher n_m mit $\mu(F_{n_m,m}) < \frac{\delta}{2^m}$. Setze $A_\delta := \bigcup_m F_{n_m,m}$. Dann ist $\mu(A_\delta) < \delta$. Damit ist $\Omega \setminus A_\delta = \bigcap_m \bigcap_{k \geq n_m} \{|f_n - f| < \frac{1}{m}\}$. Das bedeutet aber, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus A_\delta$. ☐

§ 4 Konvergenz (lokal) im Maß

Da das Maß μ als σ-endlich vorausgesetzt ist, können wir uns eine Folge $(\Omega_n)_n$ paarweise disjunkter Mengen $\Omega_n \in \Sigma$ wählen mit $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$. Wir betrachten die Halbmetrik(!)

$$d(f, g) := \sum_n \frac{1}{2^n} d_{\Omega_n}(f, g)$$

auf $\mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$. Offensichtlich ist genau dann $d(f, g) = 0$ wenn $f(x) = g(x)$ μ-fast überall. Die Konvergenz bzgl. d heißt **Konvergenz (lokal) im Maß μ**.

Satz 4.1. *Es gelten die folgenden Aussagen.*

a) Die Halbmetrik d ist vollständig (sofern E vollständig ist).

b) Wenn $f_n \to f$ punktweise fast überall, so $d(f_n, f) \to 0$.

c) Wenn $d(f_n, f) \to 0$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $f_{n_k} \to f$ fast überall.

d) Genau dann ist $d(f_n, f) \to 0$, wenn $d_A(f_n, f) \to 0$ ist für alle $A \subset \Omega, \mu(A) < \infty$.

Teil d) zeigt, dass man bei anderer Wahl der Ω_n eine äquivalente Metrik erhält.

Beweis. Ad a). Die Definition der Halbmetrik d ergibt: $d(f_n, g_m) \to 0$ genau dann, wenn $d_{\Omega_k}(f_n, g_m) \to 0$ für alle k. Hat man also eine d-Cauchyfolge $(f_n)_n$, so ist $(f_n \upharpoonright_{\Omega_k})$ eine Cauchyfolge global im Maß $\mu \upharpoonright_{\Omega_k}$. Dort gibt es eine Grenzfunktion nach Satz 2.2 und die kann man zu einer messbaren Funktion f auf ganz Ω zusammensetzen.

Ad b). Sei $f_n \to f$ punktweise fast überall, $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\delta > 0$. Setze $A_{k,m} := A \cap \{|f_k - f| \geq \frac{1}{m}\}$ und $F_{n,m} := \bigcup_{k \geq n} A_{k,m}$. Dann ist $\bigcap_n F_{n,m} = \bigcap_n \bigcup_{n \geq k} \{|f_k - f| \geq \frac{1}{m}\}$ eine Nullmenge. Man findet daher(!) n_m mit $\mu(F_{n_m,m}) < \frac{\delta}{2^m}$. Setze $A_\delta := \bigcup_m F_{n_m,m}$. Dann ist $\mu(A_\delta) < \delta$. Damit ist $A \setminus A_\delta = \bigcap_m \bigcap_{k \geq n_m} A \cap \{|f_n - f| < \frac{1}{m}\}$. Das bedeutet aber, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $A \setminus A_\delta$. Hieraus folgt wiederum $d_A(f_n, f) \to 0$, denn für festes $t > 0$ Ist $A \cap \{|f_n - f| > t\} \subset A_\delta$ ür große n.

Ad c). Dies folgt aus Satz 2.2 mit einem Diagonalfolgenargument.

Ad d). Hier ist nur die eine Implikation nicht trivial. Sei $d(f_n, f) \to 0$ und sei $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$ gegeben. Angenommen, $d_A(f_n, f) \not\to 0$. Dann gibt es eine Teilfolge (wieder mit $(f_n)_n$ bezeichnet) und $\varepsilon > 0$ mit $d_A(f_n, f) > \varepsilon$. Nach c) findet sich wiederum eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ davon, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Im Beweis von b) haben wir aber schon gezeigt, dass dann auch $d_A(f_{n_k}, f) \to 0$ sein muss. Widerspruch! □

Der Raum $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$

Wir gehen nun vom Raum $\mathcal{M}(\Omega, \mu; E)$ über zum Raum

$$\mathfrak{M}(\Omega, \mu; E) := \mathcal{M}(\Omega, \mu; E)/\sim$$

der Äquivalenzklassen modulo fast überall-Gleichheit. Die Halbmetrik d wird dann auf $\mathcal{M}$ zur Metrik. Also erhält man natürlich einen vollständigen metrischen Raum, der auch noch abgeschlossen ist unter der Konvergenz "punktweise fast überall" von Folgen (definiert via Vertreterwahl). Der Vorteil dieses Übergangs liegt v.a. darin, dass man häufig gar keinen kanonischen messbaren Vertreter einer Klasse kennt, sondern sowieso nur eine "Definition fast überall" hat. (So etwa bei der Aussage des Satzes von Fubini, siehe [Haa, Satz 15].) Hat man eine fast überall definierte Funktion g gegeben, so schreiben wir in der Folge manchmal $[g]$ für die durch sie definierte Äquivalenzklasse. Analog zu Folgerung 3.2 erhalten wir die folgende sog. **Teilfolgencharakterisierung** der Konvergenz (lokal) im Maß.

Satz 4.2. *Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $(f_n)_n \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$. Genau dann konvergiert $(f_n)_n$ (lokal) im Maß, wenn jede Teilfolge von $(f_n)_n$ eine Teilfolge besitzt, die punktweise fast überall konvergiert.*

Beweis. Der Beweis ist vollständig analog zum Beweis von Folgerung 3.2, wenn man Satz 4.1 anstatt Satz 3.1 verwendet. □

§ 5 Elementarfunktionen und Treppenfunktionen

Wir wollen nun einen Approximationssatz zeigen. Eine messbare Funktion $f : \Omega \longrightarrow E$ heißt **Elementarfunktion**, wenn die Bildmenge $f(\Omega)$ endlich ist. Der Raum der Elementarfunktionen wird mit $\mathrm{El}(\Omega, \Sigma; E)$ bezeichnet.

Satz 5.1. *Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und E ein vollständig metrischer Raum. Für $f : \Omega \longrightarrow E$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $[f] \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$.

(ii) *f ist wesentlich messbar und wesentlich separabel, d.h. es gibt eine Nullmenge $N \subset \Omega$ so, dass $f\upharpoonright_{\Omega\setminus N}$ messbar und $f(\Omega\setminus N) \subset E$ separabel ist.*

(iii) *Es gibt eine Folge $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{El}(\Omega,\Sigma;E)$ von Elementarfunktionen mit $\varphi_n \to f$ fast überall.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist banal. Ebenso ist die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ offensichtlich richtig. Es bleibt also, die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ zu zeigen.

Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass μ ein endliches Maß ist. Indem man f auf einer Nullmenge verändert (d.h., indem man einen anderen Vertreter wählt), kann man annehmen, dass $f(\Omega)$ separabel ist. Sei also $(v_n)_n$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $f(\Omega)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat man $\bigcup_k B_{\frac{1}{n}}(v_k) \subset f(\Omega)$, also $\Omega = \bigcup_k f^{-1}[B_{\frac{1}{n}}(v_k)]$. Man findet daher eine endliche Menge $M_n \subset \mathbb{N}$ mit $\mu(Y_n) = \mu\left(\bigcup_{k\notin M_n} f^{-1}[B_{\frac{1}{n}}(v_k)]\right) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Man findet eine Elementarfunktion ψ_n, die auf $\Omega \setminus Y_n$ schon $\frac{1}{n}$-nahe bei f ist. Auf Y_n definiert man sie konstant (bei beliebigem Wert). Sei $Z_n = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots$. Dann ist $\mu(Z_n) < \frac{1}{2^n}$ und $Z := \bigcap_n Z_n$ ist eine Nullmenge. Man definiert nun φ_n als ψ_n auf $\Omega \setminus Z_n$ und auf Z_n konstant irgendwie. Dann geht $\varphi_n \to f$ punktweise auf $\Omega \setminus Z$! □

Folgerung 5.2. *Sei (Ω,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und E ein metrischer Raum. Dann ist $\mathrm{El}(\Omega,\Sigma;E)$ dicht in $\mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$ (lokal) im Maß.*

Treppenfunktionen und μ-Messbarkeit

Wir gehen noch näher auf den Fall ein, dass E ein F-Raum ist.

Satz 5.3. *Sei E ein F-Raum. Dann ist auch $\mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$ ein F-Raum.*

Beweis. Die Stetigkeit der Addition ist schon gezeigt worden, vgl. Bemerkung 2.3. Um die Stetigkeit der Multiplikation zu zeigen, sei $f_n \to f$ in $\mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$ und $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$. Nun hat jede Teilfolge von $g_n := \lambda_n f_n$ aber ein Teilfolge, die punktweise fast überall gegen λf konvergiert. Darum muss $g_n \to \lambda f$ in $\mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$ sein. □

Sei

$$\mathrm{St}(\Omega,\mu;E) = \mathrm{span}\{\mathbf{1}_A \otimes x \mid x \in E,\ A \subset \Omega,\ \mu(A) < \infty\}$$

der Raum der **E-wertigen Treppenfunktionen**. Dann hat man folgendes Resultat.

Satz 5.4. *Sei (Ω,μ) ein σ-endlicher Maßraum, E ein F-Raum und $f : \Omega \longrightarrow E$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $[f] \in \mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$.

(ii) *Es gibt eine Folge $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{St}(\Omega,\mu;E)$ von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$ fast überall.*

Beweis. Nur die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist zu zeigen. Nach Satz 5.1 gibt es eine Folge $(f_n)_n$ von Elementarfunktionen mit $f_n \to f$ fast überall. Dann setze $\varphi_n := \mathbf{1}_{A_n} f_n$ mit $A_n := \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$. □

Folgerung 5.5. *Ist E ein F-Raum, so ist $\mathrm{St}(\Omega,\mu;E)$ dicht in $\mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$.*

Die Funktionen $f : \Omega \longrightarrow E$ mit $[f] \in \mathfrak{M}(\Omega,\mu;E)$ heißen auch **μ-messbar**. Das folgende sehr wichtige Resultat charakterisiert μ-Messbarkeit in *Banachräumen*.

Satz 5.6. (Pettis)
Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und E ein Banachraum. Für eine Abbildung $f : \Omega \longrightarrow E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist μ-messbar, d.h. $[f] \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu, E)$.*

(ii) *f ist wesentlich separabelwertig und schwach μ-messbar, d.h. für alle $x' \in E'$ ist $x' \circ f$ skalar μ-messbar.*

Beweis. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist einfach. Es gelte (ii). Indem man f auf einer Nullmenge verändert, kann man annehmen, dass $f(\Omega) \subset F$ ist für einen abgeschlossenen separablen Teilraum $F \subset E$. Da mit Hahn-Banach jedes Funktional auf F zu einem auf E fortgesetzt werden kann, kann man also o.E. annehmen, dass E selbst schon separabel ist. Die Mengen $B_\varepsilon(x)$ erzeugen dann die Borel'sche σ-Algebra!

Sei $(x_n)_n$ eine dichte Teilmenge von E. Mit Hahn-Banach wählt man $x'_n \in E'$ mit $\|x'_n\| = 1$ und $x'_n(x_n) = \|x_n\|$. Durch Abänderung auf einer weiteren Nullmenge kann man annehmen, dass $x'_n \circ f$ messbar ist für alle n. Für alle $x \in E$ und $\omega \in \Omega$ ist dann $\|f(\omega) - x\| = \sup_n |x'_n(f(\omega)) - x'_n(x)|$, daher ist $g_x := \|f(\cdot) - x\| : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar. Somit ist $f^{-1}B_\varepsilon(x) = g_x^{-1}[0, \varepsilon) \in \Sigma$. Folglich ist f f.ü.-messbar. □

§ 6 Approximationsresultate

Sei wieder (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und E ein (vollständiger) metrischer Raum. Es sei ein Teilsystem $\mathcal{R} \subset \Sigma$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\mathcal{R}$ ist eine Algebra.
2) Es gibt $(\Omega_n)_n \subset \mathcal{R}$ mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle n und $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$.
3) $\sigma(\mathcal{R}) = \Sigma$, d.h. $\mathcal{R}$ erzeugt Σ als σ-Algebra.

Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow E$ heiße $\mathcal{R}$**-elementar**, wenn es eine disjunkte Zerlegung $\Omega = \bigcup_{j=1}^m B_j$ mit $B_j \in \mathcal{R}$ derart gibt, dass f auf jeder Menge B_j konstant ist. Die Menge der $\mathcal{R}$-elementaren Funktionen werde mit $\mathrm{El}(\Omega, \mathcal{R}; E)$ bezeichnet. Offensichtlich ist $\mathrm{El}(\Omega, \mathcal{R}; E) \subset \mathrm{El}(\Omega, \Sigma; E)$.

Satz 6.1. *Seien $(\Omega, \Sigma, \mu), \mathcal{R} \subset \Sigma$ und E wie oben. Dann ist die Menge* $\mathrm{El}(\Omega, \mathcal{R}; E)$ *dicht in $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$.*

Zunächst beweisen wir ein Hilfsresultat.

Lemma 6.2. *Sei $\mathcal{R} \subset \Sigma$ ein Ring mit $\sigma(\mathcal{R}) = \Sigma$. Sei $C \in \mathcal{R}$ mit $\mu(C) < \infty$. Setze $\mathcal{R}_C := \{B \in \mathcal{R} \mid B \subset C\} = \{B \cap C \mid B \in \mathcal{R}\}$. Dann gilt für jedes $A \in \Sigma$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{R}_C : \mu\left((A \cap C) \triangle B\right) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Beweis. Setze $\mathcal{D} := \{A \in \Sigma \mid (1) \text{ gilt}\}$. Man zeigt, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem ist, welches $\mathcal{R}$ umfaßt. Da $\mathcal{R}$ ein Ring und mithin $\cap$-stabil ist, folgt $\mathcal{D} \supset \delta(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R}) = \Sigma$.

Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}$ (man wähle $B = C$) und $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$. Sei $A \in \mathcal{D}$. Dann hat man $(A^c \cap C) \triangle (C \setminus B) = (A \cap C) \triangle B$ für alle $B \subset C$. Dies zeigt, dass auch $A^c \in \mathcal{D}$ ist. Seien $A_n \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt und $\bigcup_N A_n = A$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung findet sich zu jedem n ein $B_n \in \mathcal{R}_C$ mit $\mu((A_n \cap C) \triangle B_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Setze $B := \bigcup_{n=1}^m B_n$ für ein (noch zu bestimmendes) m. Dann ist $B \in \mathcal{R}_C$ und

$$(A \cap C) \triangle B = \bigcup_{n=1}^{m} (A_n \cap C) \triangle B_n \ \cup \left(\bigcup_{m+1}^{\infty} A_n \right) \cap C$$

Die letztere Menge fällt mit m gegen ∞. Weil $\mu(C) < \infty$ ist, kann man daher m so wählen, dass $\mu((\bigcup_{n>m} A_n) \cap C) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann ist offensichtlich $\mu((A \cap C) \triangle B) < \varepsilon$. Somit $A \in \mathcal{D}$ und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 6.1 zu.

Beweis von Satz 6.1. Da $\mathrm{El}(\Omega, \mu; E)$ bereits dicht liegt, reicht es, eine gegebene Elementarfunktion f durch $\mathcal{R}$-Elementarfunktionen im Maß zu approximieren. Man kann die Ω_n als paarweise disjunkt voraussetzen. Da $\mathcal{R}$ eine Algebra ist, reicht es f auf jedem Ω_n zu approximieren. (Man setzt die lokalen Approximanten zu einer einfachen Funktion f_m auf ganz Ω zusammen, wobei man nur endlich viele einschließt und f_m auf $\bigcup_{n \geq m} \Omega_n$ einen beliebigen konstanten Wert zuweist.)

Sei also f konstant auf A_j, etwa $f\upharpoonright_{A_j} \equiv v_j$, wobei $(A_j)_{j=1}^m$ eine disjunkte Zerlegung von Ω ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $\delta > 0$. Setze $\varepsilon := \frac{2}{m(m+1)}\delta$. Man wendet nun induktiv das Lemma 6.2 an.
1. Schritt: $C := \Omega_n$, $A = A_1$. Man findet $B_1 \in \mathcal{R}, B_1 \subset \Omega_n$ mit $\mu((A_1 \cap C) \triangle B_1) < \varepsilon$.
2. Schritt: $C := \Omega_n \setminus B_1$, $A = A_2$. Man findet $B_2 \in \mathcal{R}, B_2 \subset \Omega_n \setminus B_1$ mit $\mu((A_2 \cap C \setminus B_1) \triangle B_2) < \varepsilon$.
j.ter Schritt: $C := \Omega_n \setminus \bigcup_1^{j-1} B_r$, $A = A_j$. Man findet $B_j \in \mathcal{R}, B_j \subset \Omega_n \setminus \bigcup_1^{j-1} B_r$ mit $\mu((A_j \cap C \setminus \bigcup_1^{j-1} B_r) \triangle B_j) < \varepsilon$.

Nach Konstruktion sind die B_j paarweise disjunkt und liegen allesamt innerhalb Ω_n. Nun bildet man eine $\mathcal{R}$-Elementarfunktion φ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} v_j & x \in B_j \quad (j = 1, \ldots, m) \\ e & x \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j \end{cases}$$

wobei $e \in E$ ein beliebiger Wert ist.

Behauptung: $\mu(\Omega_n \cap \{f \neq \varphi\}) < \delta$. Tatsächlich, es ist

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega_n \cap \{f \neq \varphi\}) &= \sum_{j=1}^m \mu(\Omega_n \cap A_j \cap \{f \neq \varphi\}) \leq \sum_{j=1}^m \mu(\Omega_n \cap A_j \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \mu((\Omega_n \setminus \bigcup_{r=1}^{j-1} B_r) \cap A_j \setminus B_j) + \mu(\bigcup_{r=1}^{j-1} B_r \cap A_j \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \mu((\Omega_n \setminus \bigcup_{r=1}^{j-1} B_r) \cap A_j \setminus B_j) + \sum_{r=1}^{j-1} \mu(B_r \cap A_j) \\
&< m\varepsilon + \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{j-1} \mu(B_r \setminus A_r) \\
&\leq m\varepsilon + \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{j-1} \mu(B_r \setminus (\Omega_n \cap A_r \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} B_i)) \leq m\varepsilon + \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{j-1} \varepsilon \\
&= (m + \frac{m(m-1)}{2})\varepsilon = \frac{m(m+1)}{2}\varepsilon = \delta.
\end{aligned}$$

$\square$

Wir werden auf Lemma 6.2 im nächsten Abschnitt wieder zurückkommen.

§7 Die Bochnerräume $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu; E)$

Sei E ein *Banachraum* mit Norm $|\cdot|$ und (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Für $f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ ist

$$|f| := (x \longmapsto |f(x)|) \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty)).$$

Für $0 < p \leq \infty$ setzt man nun

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p} := \||f|\|_{\mathbf{L}^p} = \begin{cases} \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & 0 < p < \infty \\ \inf\{t > 0 \mid \mu(|f| > t) = 0\} & p = \infty \end{cases}$$

Weiter definiert man

$$\mathbf{L}^p(\Omega, \mu; E) := \{f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E) \mid \|f\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\}.$$

Lemma 7.1. *Sei $0 < p < \infty$. Dann ist*

$$\min(1, 2^{p-1})(a^p + b^p) \leq (a+b)^p \leq \max(1, 2^{p-1})(a^p + b^p)$$

für alle $a, b \geq 0$.

Beweis. Man kann annehmen dass $0 < a \leq b$ ist. Division durch b^p reduziert auf den Fall $b = 1$. Der Rest ist elementare Analysis. □

Satz 7.2. *Sei $0 < p \leq \infty$. Dann ist $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu; E)$ ein Vektorraum und es gilt*

$$\|f + g\|_{\mathbf{L}^p} \leq \max(1, 2^{\frac{1}{p}-1}) \left(\|f\|_{\mathbf{L}^p} + \|g\|_{\mathbf{L}^p}\right) \qquad (f, g \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mu)).$$

Man hat $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu; E) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$, und $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu)$ ist vollständig, also ein Banachraum im Fall $1 \leq p \leq \infty$.

Beweis. Nach Lemma 7.1 ist $|f + g|^p \leq \max(1, 2^{p-1})(|f|^p + |g|^p)$. Dies zeigt, dass $\mathbf{L}^p$ ein Vektorraum ist. Sei $0 < p < 1$. Dann ist

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p \, d\mu \leq \max(1, 2^{p-1}) \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu\right) = (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p),$$

also $\|f + g\|_p \leq (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$. Im Fall $p \geq 1$ hat man die Minkowski-Ungleichung, wie bekannt.

Sei wieder $0 < p < \infty$ beliebig. Für $t > 0$ ist $\|f\|_p^p \geq \mu(|f| > t)t^p$. Dies liefert die Einbettung $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu; E) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$.

Wir zeigen nun die Vollständigkeit. Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu)$. Also gibt es ein $f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu)$ mit $f_n \to f$ (lokal) im Maß. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass $f_n \to f$ punktweise fast überall. Mit Fatou folgt

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \liminf_n \int |f_n|^p \, d\mu \leq \sup_n \|f_n\|_p^p < \infty.$$

Also ist $f \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mu)$. Wieder mit Fatou ist $\int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \liminf_m \int |f_n - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon$ für hinreichend grosses n. □

Bemerkungen 7.3. 1) Im Fall $p < 0$ erhält man keinen Banachraum, nicht mal einen lokalkonvexen Vektorraum. Allerdings ist $\mathbf{L}^p$ mit $0 < p < 1$ ein sog. **Quasi-Banachraum**.

2) Aus dem Beweis von Satz 7.2 sieht man: Ist $f_n \to f$ in $\mathbf{L}^p$, dann ist sogar $f_n \to f$ *global* im Maß.

Wir kommen nun zum wichtigsten Grenzwertsatz für $\mathbf{L}^p$-Räume. Die Abkürzung "LDC" steht dabei für "**L**ebesgue's **D**ominated **C**onvergence Theorem".

Satz 7.4. (LDC)
Sei $0 < p < \infty$ und $(f_n)_n \subset \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; E)$.

a) *Ist $f_n \to f$ punktweise f. ü. und gibt es $0 \leq g \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; \mathbb{R})$ mit $|f_n| \leq g$ f.ü. für alle n, so $f \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; E)$ und $\|f_n - f\|_{\mathbf{L^p}} \to 0$.*

b) *Wenn $f_n \to f$ in $\mathbf{L^p}$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ und $0 \leq g \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; \mathbb{R})$ mit $f_{n_k} \to f$ punktweise f.ü. und $|f_{n_k}| \leq g$ f.ü. für alle k.*

Beweis. Zu a). Klar ist $f \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; E)$. Wegen $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$ kann man o.B.d.A $f_n \geq 0$, $f = 0$ und $p = 1$ annehmen. Dann ist $\displaystyle\int f_n \leq \int_{\Omega \setminus A} g + \int_{A_\delta} g + \int_{A \setminus A_\delta} f_n$. Dabei wählt man zunächst A mit $\mu(A) < \infty$ so, dass $\int_A g$ klein ist. (Das geht mit Monotoner Konvergenz.) Dann findet man $\delta > 0$ so, dass $\int_B g$ klein ist, wann immer man $\mu(B) < \delta$ hat (siehe [Haa, Satz 3]). Schließlich findet man $A_\delta \subset A$ mit $\mu(A_\delta) < \delta$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $A \setminus A_\delta$ (Egoroff).

Hier ist noch ein anderer Beweis. Setze $g_k := \sup_{n,m \geq k} |f_n - f_m|^p$. Dann ist $0 \leq g_k \leq 2^p g^p$ und $g_k \searrow 0$ punktweise f.ü.. Mit monotoner Konvergenz folgt $\int g_k \searrow 0$. Das zeigt, dass $(f_n)_n$ eine $\mathbf{L^p}$-CF ist. Nach Satz 7.2 existiert $h \in \mathbf{L^p}$ mit $f_n \to h$ in $\mathbf{L^p}$. Damit ist $f = h$ f.ü..

Zu b). Ohne Einschränkung kann man $f = 0$ annehmen. Finde Teilfolge $(f_n)_n$ mit $\|f_n\|_p < \frac{1}{2^{2^n}}$.
.... □

Wir wenden uns einem wichtigen Approximationssatz zu.

Satz 7.5. *Sei $\mathcal{R} \subset \Sigma$ ein Mengensystem mit folgenden Eigenschaften:*

1) *$\mathcal{R}$ ist ein Ring.*
2) *$\mu(B) < \infty$ für alle $B \in \mathcal{R}$.*
3) *Es gibt $(\Omega_n)_n \subset \mathcal{R}$ mit $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$.*
4) *$\sigma(\mathcal{R}) = \Sigma$.*

Dann ist $\mathrm{St}(\Omega, \mathcal{R}; E)$ dicht in $\mathbf{L^p}(\Omega, \mu; E)$ für alle $0 < p < \infty$.

Beweis. Wir zeigen zumächst die Richtigkeit derBehauptung für $\mathcal{R} = \Sigma$. Sei $f \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; E)$. Nach Folgerung 5.2 gibt es $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{St}(\Omega, \Sigma; E)$ mit $\varphi_n \to f$ punktweise fast überall. Man setzt $\psi_n := \varphi_n \mathbf{1}_{|\varphi_n| \leq 2|f|}$. Dann ist auch $\psi_n \in \mathrm{St}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ und $\psi_n \to f$ punktweise f.ü.. Darüberhinaus ist $|\psi_n| \leq 2\,|f|$ und mit LDC folgt $\psi_n \to f$ in $\mathbf{L^p}$.

Die zweite Behauptung folgt aus Lemma 6.2 wie in [Haa, Satz 12]. □

Das Integral

Sei wieder (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Für $f \in \mathrm{St}(\Omega, \mu; E)$ wählt man eine Darstellung $f = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \otimes x_i$ für gewisse $x_i \in E$ und $A_i \in \Sigma$ mit $\mu(A_i) < \infty$. Setze

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i.$$

Man zeigt (via "Disjunktifizierung" und gemeinsamer Verfeinerung), dass diese Definition unabhängig ist von der gewählten Darstellung, vgl. [Lan]. Auf diese Weise erhält man eine lineare(!) Abbildung

$$\int : \mathrm{St}(\Omega, \mu; E) \longrightarrow E$$

mit

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu = \|f\|_{\mathbf{L^1}}$$

für alle $f \in \mathrm{St}(\Omega, \mu; E)$. Durch stetige Fortsetzung erhalten wir schließlich eine *lineare Kontraktion*

$$(f \longmapsto \int f \, d\mu) : \mathbf{L^1}(\Omega, \mu; E) \longrightarrow E.$$

Lemma 7.6. *Sei F ein zweiter Banachraum, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ und $0 < p \leq \infty$. Dann ist $T \circ f \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; F)$ für alle $f \in \mathbf{L^p}(\Omega, \mu; E)$ und*

$$T(\int f \, d\mu) = \int T \circ f \, d\mu$$

für alle $f \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu, E)$.

Beweis. Einfach. □

Satz 7.7. *Sei $\mu(\Omega) = 1$, $f \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu; E)$ und $A \subset E$. Dann gilt*

$$f \in A \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \Longrightarrow \quad \int f \, d\mu \in \overline{\mathrm{conv}}(A).$$

Beweis. Sei $K := \overline{\mathrm{conv}}(A)$ und $x := \int f \, d\mu$. Dann ist K abgeschlossen und konvex. Falls $x \notin K$ gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein stetiges lineares Funktional $x' : E \longrightarrow \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $x'(x) < t \leq x'(K)$. Dann ist aber $x' \circ f \geq t$ f.ü. und damit $\int x' \circ f \, d\mu \geq t$. Wegen Lemma 7.6 folgt dann $x'(x) \geq t$ mit Widerspruch zur Annahme. □

Der folgende Satz gibt eine gewisse Umkehrung des letzten.

Satz 7.8. (Averaging Theorem)
Sei $f \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu; E)$ und $S \subset E$ abgeschlossen. Wenn

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in S \quad \text{für alle } A \in \Sigma \text{ mit } 0 < \mu(A) < \infty,$$

dann $f(x) \in S$ für μ-fast alle $x \in \Omega$.

Beweis. Ohne Einschränkung kann man E als separabel voraussetzen. Da das Maß σ-endlich ist, kann man sich darüberhinaus auf den Fall $\mu(\Omega) < \infty$ zurückziehen. Sei $v \in E \setminus S$. Dann gibt es einen Radius $r > 0$ mit $B_r(v) \cap S = \emptyset$. Sei $A := \{f \in B_{\frac{r}{2}}(v)\}$. Wenn $\mu(A) > 0$ ist, dann

$$\left| \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu - v \right| \leq \left| \frac{1}{\mu(A)} \int f - v \, d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - v| \leq \frac{r}{2}$$

mit einem Widerspruch zur Voraussetzung. Daher $\mu(A) = 0$. Indem man v aus einer abzählbar dichten Teilmenge von $E \setminus S$ und nur Radien $r = \frac{1}{m}$ benutzt, sieht man, dass $\{f \notin S\}$ eine Nullmenge ist. □

Folgerung 7.9. *Sei $f \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu; E)$ mit*

$$\int_A f \, d\mu = 0 \quad \text{für alle } A \in \Sigma, \mu(A) < \infty.$$

Dann ist $f = 0$ f.ü..

§ 8 Produkträume

Wir betrachten nun zwei σ-endliche Maßräume (Ω, μ) und (Ω', ν) und ihren Produktraum $(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu)$. Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis einer *kanonischen Homöomorphie*

$$\mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E) \cong \mathfrak{M}(\Omega, \mu; \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E)).$$

Dafür bedarf es einiger Vorbereitungen. Zunächst erinnern wir an einen bekannten Sachverhalt aus der Maßtheorie.

Lemma 8.1. *Sei $A \subset \Omega \times \Omega'$. Genau dann ist A eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge, wenn für μ-fast alle x der Schnitt $A_x := \{y \in \Omega' \mid (x, y) \in A\}$ eine ν-Nullmenge ist.*

Hat man also eine Klasse $[K] \in \mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E)$ gegeben, so ist die Abbildung

$$\tilde{K} := (x \longmapsto [K(x, \cdot)])$$

eindeutig bis auf Nullmengen. Ist dabei K messbar und separabelwertig, so sieht man $[K(x, \cdot)] \in \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E)$. Das Problem ist zu zeigen, dass tatsächlich

$$[x \longmapsto [K(x, \cdot)]] \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E))$$

ist. Hierzu muss man die Abbildung $\tilde{K}$ als punktweisen f.ü.-Grenzwert von Elementarfunktionen erkennen. An dieses Ergebnis tasten wir uns nun langsam heran.

Lemma 8.2. *Sei $\mathcal{R}$ die von den "Quadermengen" $A \times B$ mit $A \subset \Omega, B \subset \Omega'$ erzeugte Algebra. Dann ist $\mathrm{El}(\Omega \times \Omega', \mathcal{R}; E)$ dicht in $\mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E)$.*

Beweis. Man wende Satz 6.1 an. □

Wie sehen die typischen Elemente der Algebra $\mathcal{R}$ aus?

Lemma 8.3. *Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(()\,\Omega)$ ein System von Teilmengen mit den folgenden Eigenschaften:*

1) *$\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil.*
2) *Für $A, B \in \mathcal{E}$ ist $A \setminus B$ eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{E}$.*

Dann ist $\mathcal{A} := \{C \mid C$ ist endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{E}\}$ der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring. Dann ist offensichtlich $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{R}$. Es reicht also zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Ring ist. Die $\cap$-Stabilität folgt aus (1) und der Identität

$$\bigcup_i A_i \cap \bigcup_j B_j = \bigcup_{i,j} A_i \cap B_j.$$

Offenbar liegt eine endliche Vereinigung *paarweise disjunkter* Mengen aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$. Wegen

$$\bigcup_i A_i \setminus \bigcup_j B_j = \bigcup_i \bigcap_j (A_i \setminus B_j)$$

und der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$ also auch $\setminus$-stabil. Wegen $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ ist schließlich $\mathcal{A}$ auch $\cup$-stabil, also ein Ring. □

Die Voraussetzungen von Lemma 8.3 treffen insbesondere auf das System $\mathcal{E} := \{A \times B \mid A \in \Sigma,\ B \in \Sigma'\}$ zu. Dies folgt aus den Identitäten

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \quad \text{und}$$
$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) =$$
$$[(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \cap B_2)] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)].$$

Nach Aussage des Lemmas ist also jedes Element von $\mathcal{R}$ eine disjunkte Vereinigung von Quadermengen.

Lemma 8.4. *Sei $\Phi : \Omega \times \Omega' \longrightarrow E$. Genau dann ist $\Phi \in \mathrm{El}(\Omega \times \Omega', \mathcal{R}; E)$, wenn es paarweise disjunkte Quadermengen $(A_i \times B_i)_{i=1}^n$ gibt mit $\Omega \times \Omega' = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$ und $\Phi\restriction_{A_i \times B_i} \cong const.$ für alle i.*

Beweis. Eine Implikation ist trivial. Sei Φ eine $\mathcal{R}$-Elementarfunktion. Dann gibt es paarweise disjunkte $C_j \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_j C_j = \Omega \times \Omega'$ und Φ ist konstant auf jedem C_j. Nach Lemma 8.3 ist jedes C_j wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadermengen. Die Behauptung folgt. □

Lemma 8.5. *Sei $\Phi : \Omega \times \Omega' \longrightarrow E$ eine $\mathcal{R}$-Elementarfunktion. Dann ist für festes $x \in \Omega$ die Funktion $\Phi(x, \cdot) \in \mathrm{El}(\Omega, \Sigma; E)$ und insgesamt*

$$(x \longmapsto [\Phi(x, \cdot)]) \in \mathrm{El}(\Omega, \Sigma;\ \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E))$$

Beweis. Es gibt eine disjunkte Zerlegung $\Omega \times \Omega' = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$, und Φ ist konstant auf jedem $A_i \times B_i$. Zu $x \in \Omega$ sei $J_x := \{i \mid 1 \leq i \leq n,\ x \in A_i\}$. Dann ist $\Omega' = \bigcup_{i \in J_x} B_i$ und diese Vereinigung ist disjunkt!

Für eine Teilmenge $F \subset \{1, \ldots, n\}$ definieren wir $A_F := \{x \in \Omega \mid J_x = F\} = \bigcap_{i \in F} A_i \cap \bigcap_{i \notin F} A_i^c$. Manche der A_F sind leer, andere nicht. Falls $A_F \neq \emptyset$, hat man $\Omega' = \bigcup_{i \in F} B_i$ als disjunkte Vereinigung. Außerdem sind die A_F paarweise disjunkt und überdecken Ω.

Wenn nun $x \in A_F$ ist, so ist $\Phi(x, \cdot)$ konstant auf jeder Menge B_i ($i \in F$), also ist $\Phi(x, \cdot)$ eine Elementarfunktion. Ausserdem ist diese Funktion für alle $x \in A_F$ dieselbe. Dies beweist die Behauptung. □

Wir kommen zum bereits eingangs angekündigten Hauptresultat.

Satz 8.6. *Seien (Ω, Σ, μ) und (Ω', Σ', ν) zwei σ-endliche Maßräume und E ein (vollständiger) metrischer Raum. Dann vermittelt die Abbildung*

$$[K(\cdot, \cdot)] \longmapsto [(x \longmapsto [K(x, \cdot)])]$$

einen Homöomorphismus

$$\mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E) \longrightarrow \mathfrak{M}(\Omega, \mu;\ \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E)).$$

Beweis. Sei $[K] \in \mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E)$ gegeben. Dann gibt es nach Satz 6.1 eine Folge Φ_n von $\mathcal{R}$-Elementarfunktionen, mit $\Phi_n \to K$ punktweise $\mu \otimes \nu$-fast überall. Dann gilt $\Phi_n(x, \cdot) \longrightarrow K(x, \cdot)$ ν-fast überall für μ-fast alle $x \in \Omega$ (nach Lemma 8.1). Dies impliziert $[\Phi_n(x, \cdot)] \to [K(x, \cdot]$ in $\mathfrak{M}(\Omega', \nu; E)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$. Lemma 8.5 zeigt, dass aber $(x \longmapsto [\Phi_n(x, \cdot)])$ eine Elementarfunktion ist. Somit ist $[x \longmapsto [K(x, \cdot)]]$ fast überall Grenzwert von Elementarfunktionen, also in $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E))$. Dies zeigt die *Wohldefiniertheit* der angegebenen Abbildung.

Die *Stetigkeit der Abbildung* kann man mit dem Teilfolgenkriterium (Satz 4.2) einfach nachweisen. Ebenso leicht folgt die *Injektivität*.

Um die *Surjektivität* zu zeigen, sei jetzt $[F] \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E))$ gegeben. Nach Satz 5.1 gibt es Elementarfunktionen $F_n : \Omega \longrightarrow \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E)$ mit $F_n \to F$ μ-fast überall. Zu jedem n existiert

daher eine disjunkte Zerlegung $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m_n} A_{nj}$ und $[f_{nj}] \in \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E)$ mit $F_n \equiv [f_{nj}]$ auf A_{nj}. Ohne Einschränkung kann man die f_{nj} als messbar und separabelwertig ansehen.
Man setzt nun

$$\Phi_n(x, y) := f_{nj}(x) \quad \text{für } x \in A_{nj},\ 1 \leq j \leq m_n.$$

Die Abbildung $\Phi_n : \Omega \times \Omega' \longrightarrow E$ ist messbar, denn für eine offene Teilmenge $U \subset E$ ist $\Phi_n^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{m_n} A_{nj} \times f_{nj}^{-1} U$. Offensichtlich ist Φ_n auch separabelwertig.

Wir werden nun zeigen, dass $(\Phi_n)_n$ eine Cauchyfolge lokal im Maß $\mu \otimes \nu$ ist. Seien dazu $A \in \Sigma, B \in \Sigma'$ mit $\mu(A), \nu(B) < \infty$ un d$t > 0$ fest gewählt. Da $F_n(x) \to F(x)$ lokal im Maß ν für fast alle $x \in \Omega$ hat, gilt

$$\nu(B \cap \{|F_n(x) - F_m(x)| > t\}) \to \infty \quad (n, m \to \infty)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Nach dem Satz von Egoroff (Satz 3.3) ist diese Konvergenz sogar fast gleichmäßig auf A. Zu $\delta > 0$ wählt man daher $A_\delta \subset A$ mit $\mu(A_\delta) < \delta$ und gleichmäßiger Konvergenz auf $A \setminus A_\delta$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \nu(A \times B \cap \{|\Phi_n - \Phi_m| > t\}) &= \int_A \nu(B \cap \{|F_n(x) - F_m(x)| > t\})\, \mu(dx) \\
&\leq \int_{A\delta} \nu(B)\, d\mu + \int_{A \setminus A_\delta} \nu(B \cap \{|F_n(x) - F_m(x)| > t\})\, \mu(dx) \\
&\leq \delta \nu(B) + \int_{A \setminus A_\delta} \nu(B \cap \{|F_n(x) - F_m(x)| > t\})\, \mu(dx).
\end{aligned}$$

Da man δ beliebig klein machen kann, ist also Φ_n tatsächlich Cauchy (lokal) im Maß $\mu \otimes \nu$.

Also gibt es einen Grenzwert $[\Phi] \in \mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E)$ und nach Auswahl einer Teilfolge ist sogar $\Phi_n \to \Phi$ $\mu \otimes \nu$-fast überall. Daraus folgt dann $[x \longmapsto [\Phi(x, \cdot)] = [F]$ und also die Surjektivität.

Die *Stetigkeit der Umkehrabbildung* beweist man wieder mithilfe des Teilfolgenkriteriums, wobei man nochmal das eben gezeigte Egoroff-Argument benutzt. ☐

Bemerkung 8.7. Ist E ein F-Raum, so ist die Abbildung $[K] \longmapsto [x \longmapsto [K(x, \cdot)]]$ sogar linear, also ein toplogischer Isomorphismus der F-Räume $\mathfrak{M}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E)$ und $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; \mathfrak{M}(\Omega', \nu; E))$. Wenn E sogar ein Banachraum ist, besagt der *Satz von Fubini* , dass

$$\mathbf{L^1}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E) \cong \mathbf{L^1}(\Omega, \mu; \mathbf{L^1}(\Omega', \nu; E))$$

unter der betrachteten Isomorphie ist. (Die volle Aussage des Satzes von Fubini erhält man, wenn man noch Lemma 7.6 auf die Integralabbildung $(g \longmapsto \int g\, d\nu) : \mathbf{L^1}(\Omega', \nu; E) \longrightarrow E$ anwendet. Die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge ergibt sich aus der Tatsache, dass $\operatorname{span}\{\mathbf{1}_{A\times B} \otimes x \mid A \in \Sigma,\ B \in \Sigma',\ \mu(A), \nu(A) < \infty,\ x \in E\}$ dicht in $\mathbf{L^1}(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu; E)$ liegt (Satz 7.5).

§9 Der Verband $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$

Das Drama der punktweisen Konvergenz

Seien $f_n, f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$. Man sagt $f_n \to f$ “fast überall”, wenn diese Aussage nach Vertreterwahl richtig ist. Man wählt also Vertreter $\tilde{f}_n$ von f_n und $\tilde{f}$ von f und hat

$$\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Da eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist diese Sprechweise gerechtfertigt.

Die Probleme beginnen, wenn man statt Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verallgemeinerte Folgen, sog. *Netze* $(f_\alpha)_\alpha$ betrachtet. Man hätte gern auch hier einen Begriff von "punktweiser Konvergenz fast überall". Allerdings kann man dies nicht mehr über die Wahl von Vertretern definieren, zumindest dann nicht, wenn die Indexmenge überabzählbar ist. Wir werden im folgenden eine Lösung dieses Problems beschreiben. Natürlich soll der herkömmliche Begriff im neuen aufgehen und ein vernünftiger Zusammenhang zur herkömmlichen punktweisen Konvergenz fast überall bestehen, etwa bei stetigen Funktionen (vgl. Satz 10.8).

Die Idee zur Lösung besteht in der Äquivalenz

$$f_\alpha(x) \to f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_\gamma \sup_{\alpha\geq\gamma} |f_\alpha(x) - f(x)| = 0. \tag{2}$$

Nun schreibt man $\inf_\gamma \sup_{\alpha\geq\gamma} |f_\alpha(x) - f(x)| = \limsup_\alpha |f_\alpha - f|\,(x)$ und fasst die rechte Seite von (2) als Gleichheit in $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ auf. Zunächst scheint dabei nichts gewonnen, weil man nicht weiß, wie die Funktion $\limsup_\alpha |f_\alpha - f|$ überhaupt definiert werden soll, ohne in dieselben Schwierigkeiten zu fallen wie oben. Glücklicherweise gibt es dafür eine elegante Lösung.

Der Verband $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$
Sei im folgenden wieder (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Die Menge

$$\mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$$

der μ-Äquivalenzklassen positiv messbarer Funktionen auf Ω ist bezüglich der üblichen Ordnung eine partiell geordnete Menge. Sie ist sogar ein Verband, d.h. zu je zwei Punkten f, g existiert $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$. Verbandstheoretisch ist diese Menge isomorph zu $\{f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega, \mu) \mid 0 \leq f \leq 1\}$. Man wählt nämlich eine stetige, bijektive und streng monotone Funktion $\varphi : [0, \infty] \longrightarrow [0, 1]$, etwa

$$\varphi = (t \longmapsto \frac{t}{1+t}) : [0, \infty] \longrightarrow [0, 1]$$

und erhält einen Ordnungsismorphismus

$$(f \longmapsto \varphi \circ f) : \mathfrak{M}(\Omega, \mu) \longrightarrow \{g \in \mathbf{L}^\infty(\Omega, \mu) \mid 0 \leq g \leq 1\}.$$

Dieser Isomorphismus respektiert sogar noch die Konvergenz (lokal) im Maß!

Satz 9.1. *Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Dann ist der Verband $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$ vollständig, d.h., in $\mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$ hat jede nichtleere Menge A sowohl Supremum als auch Infimum.*

Wir beginnen mit einem ähnlichen Satz.

Satz 9.2. *Sei (Ω, μ) ein beliebiger Maßraum. Dann ist $\mathbf{L}^1(\Omega, \mu; \mathbb{R})$ ein vollständiger Verband, d.h., jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbf{L}^1(\Omega, \mu; \mathbb{R})$ besitzt ein Supremum.*

Beweis. Durch Verschieben von A kann man annehmen, dass es ein $f \in A$ gibt mit $f \geq 0$. Indem man nun zur Menge der endlichen Suprema übergeht, erreicht man, dass A nach oben gerichtet ist und $0 \leq A$ gilt. Da A nach oben beschränkt ist, ist jedenfalls $C := \sup_{f \in A} \|f\|_1 < \infty$. Also kann man eine Folge $(f_n) \subset A$ derart wählen, dass $f_n \leq f_{n+1}$ und $\|f_n\| \to C$ gilt. Dann ist offensichtlich (f_n) sogar eine Cauchyfolge. Also gibt es $f \in \mathbf{L^1}$ mit $f_n \to f$.

Sei nun $g \in A$ beliebig. Dann ist $f_n \leq g \vee f_n$ und also $\int f_n \leq \int g \vee f_n \leq C$. Lässt man $n \to \infty$ gehen, ergibt sich $f \leq g \vee f$ und $C = \int f \leq \int f \vee g \leq C$. Damit ist $f = f \vee g$, also $g \leq f$. Somit ist f eine obere Schranke für A. Sei h eine weitere obere Schranke. Dann ist $f_n \leq h$ für alle n und also $f \leq h$ nach Grenzübergang. Damit ist $f = \sup A$ gezeigt. □

Bemerkung 9.3. Der Beweis zeigt, dass Normbeschränktheit und Ordnungsbeschränktheit in $\mathbf{L^1_+}(\Omega, \mu)$ gleichbedeutend sind. Außerdem konvergiert eine nach oben gerichtete, beschränkte Menge in $\mathbf{L^1_+}$ gegen ihr Supremum.

Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 9.1 zu.

Beweis von Satz 9.1. Es reicht die Vollständigkeit des Intervalles $[0, 1]$ in $\mathbf{L^\infty}$ zu zeigen. Ist das Maß μ endlich, so ist $\mathbf{L^\infty} \subset \mathbf{L^1}$. Man nimmt das Supremum der Menge A in $\mathbf{L^1}$, das dann natürlich wieder in $[0, 1]$ liegen muss, weil man ja eine Folge aus A finden kann, die punktweise gegn das Supremum konvergiert. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 9.2. Im Falle eines σ-endlichen Maßes μ findet man ein endliches Maß ν, das dieselben Nullmengen hat wie μ. (Sei $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ eine disjunkte Zerlegung mit $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ für alle n. Setze $f := \sum_n \frac{n^2 \mu(\Omega_n)}{\mathbf{1}}_{\Omega_n}$ und betrachte $\nu := f\,d\mu$.) Insbesondere ist $\mathbf{L^\infty}(\Omega, \mu) = \mathbf{L^\infty}(\Omega, \nu)$. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 9.4. Indem man Satz 9.2 benutzt, kann man die Vollständigkeit eines jeden der Verbände $\mathbf{L^p}(\Omega, \mu; \mathbb{R})$ zeigen.

§ 10 Fast-überall-Konvergenz von Netzen

Sei $(f_\alpha)_\alpha \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ ein Netz. Wir sagen $(f_\alpha)_\alpha$ sei **fast überall-Cauchy**, falls

$$\limsup_{\alpha,\beta} |f_\alpha - f_\beta| = \inf_\gamma \sup_{\alpha,\beta \geq \gamma} |f_\alpha - f_\beta| = 0$$

ist. Man sagt $f_\alpha \to f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu)$ **fast überall**, falls

$$\limsup_{\alpha} |f_\alpha - f| = \inf_\beta \sup_{\alpha \geq \beta} |f_\alpha - f| = 0$$

ist. Die Suprema und Infima werden dabei gerade nicht punktweise genommen (das macht i.A. gar keinen Sinn), sondern im vollständigen Verband $\mathfrak{M}(\Omega, \mu, [0, \infty])$.

Im folgenden wollen wir den Zusammenhang zu Konvergenz im Maß klären. Weil (Ω, μ) als σ-endlich vorausgesetzt ist, können wir uns eine Folge $\Omega_n \subset \Omega$ mit $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ fest wählen. Das folgende Lemma wird uns nützlich sein.

Lemma 10.1. *Sei $\Omega' \subset \Omega$. Sei $\nu = \mu\restriction_{\Omega'}$. Betrachte die Einschränkungsabbildung*

$$(f \longmapsto f\restriction_{\Omega'}) : \mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty]) \longrightarrow \mathfrak{M}(\Omega', \nu; [0, \infty]).$$

Dann ist $(\sup A) \restriction = \sup(A \restriction)$ *und* $(\inf A \restriction) = \inf(A \restriction)$ *für alle* $\emptyset \neq A \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$.

Beweis. Aus $A \leq \sup A$ folgt $A\restriction \leq (\sup A)\restriction$ und daraus $\sup(A\restriction) \leq (\sup A)\restriction$. Für die Umkehrung sei $A\restriction \leq h$. Bezeichne mit $\tilde{h}$ die Fortsetzung von h auf Ω durch ∞ außerhalb Ω'. Dann ist jedenfalls $A \leq \tilde{h}$, also $\sup A \leq \tilde{h}$. Daraus folgt $(\sup A)\restriction \leq \tilde{h}\restriction = h$. Insgesamt ergibt sich $(\sup A)\restriction \leq \sup(A\restriction)$. Ein analoges Argument bestätigt die Behauptung für $\inf A$. □

Ein erster Zusammenhang von Konvergenz f.ü. und Konvergenz (lokal) im Maß liefert das folgende Lemma.

Lemma 10.2. *Sei $(f_\alpha)_\alpha \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mu; [0, \infty])$ ein fallendes Netz. Dann*

$$\inf_\alpha f_\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_\alpha \to 0 \text{ (lokal) im Maß } \mu$$

Beweis. Zunächst einmal bemerkt man dass $\inf_\alpha f_\alpha = 0$ gleichbedeutend ist mit $\inf_\alpha f_\alpha\restriction_{\Omega_n} = 0$ für alle n. (Die eine Implikation folgt sofort aus Lemma 10.1, Die andere aus $f\restriction_{\Omega_n} = 0\,\forall\, n \;\to\; f = 0$.) Somit kann man sich auf den Fall eines endlichen Maßes μ zurückziehen. Wir wählen noch $\varphi : [0, \infty] \longrightarrow [0, 1]$ wie oben ein stetiger Ordnungsisomorphismus mit stetiger Inverse.

Nehmen wir nun $\inf_\alpha f_\alpha = 0$ an. Sei $t > 0$ und $A_\alpha := \{f_\alpha > t\}$. Dann $t\mathbf{1}_{A_\alpha} \leq f_\alpha$, also $\varphi(t)\mathbf{1}_{A_\alpha} \leq \varphi \circ f_\alpha$. Daraus folgt $\varphi(t)\mu(A_\alpha) \leq \int \varphi \circ f_\alpha \to \int \inf_\alpha \varphi \circ f_\alpha = 0$. Das bedeutet $(f_\alpha)_*(t) \to 0$. Da t beliebig war, ist $f_\alpha \to 0$ im Maß.

Zum Beweis der Umkehrung nehmen wir $f_\alpha \to 0$ im Maß an. Sei $f := \inf_\alpha f_\alpha$. Dann $\mu(f > t) \leq \mu(f_\alpha > t)$ für alle $t > 0$. Nach Annahme ist also $\mu(f > t) = 0$ für alle t, also $f = 0$. □

Satz 10.3. *Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $(f_\alpha)_\alpha \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ ein Netz. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) Ist $(f_\alpha)_\alpha$ fast überall-Cauchy, so existiert $f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ mit $f_\alpha \to f$ fast überall.

b) Ist $f_\alpha \to f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ fast überall so ist $(f_\alpha)_\alpha$ fast überall-Cauchy und es gilt $f_\alpha \to f$ (lokal) im Maß.

c) Ist $f_\alpha \to f$ und $f_\alpha \to g$ fast überall, so $f = g$.

Beweis. Zu c). Für festes γ ist $|f - g| \leq |f - f_\gamma| + |g - f_\gamma| \leq \sup_{\alpha \geq \gamma} |f - f_\gamma| + \sup_{\alpha \geq \gamma} |g - f_\gamma| =: g_\gamma + h_\gamma$. Für feste α, β existiert $\gamma \geq \alpha, \beta$, also $|f - g| \leq g_\alpha + h_\beta$. Nimmt man Infima, ergibt sich $|f - g| \leq 0 + 0 = 0$.

Zu a) und b). Sei $f_\alpha \to f$ f.ü.. Sei γ fest. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \geq \gamma$ jedenfalls $|f_\alpha - f_\beta| \leq |f_\alpha - f| + |f_\beta - f|$, also $\sup_{\alpha,\beta \geq \gamma} |f_\alpha - f_\beta| \leq \sup_{\alpha \geq \gamma} |f_\alpha - f| + \sup_{\beta \geq \gamma} |f_\beta - f| = 2 \sup_{\alpha \geq \gamma} |f_\alpha|$, woraus dann $\inf_\gamma \sup_{\alpha,\beta \geq \gamma} |f_\alpha - f_\beta| = 0$ folgt.
Sei jetzt $(f_\alpha)_\alpha$ f.ü. Cauchy und sei $g_\gamma := \sup_{\alpha,\beta \geq \gamma} |f_\alpha - f_\beta|$. Dann $\inf_\gamma g_\gamma = 0$. Wir nehmen zunächst $\mu(\Omega) < \infty$ an. Dann ist $g_\gamma \to 0$ im Maß. Sei $t > 0$. Dann für $\alpha, \beta \geq \gamma$ $\mu(|f_\alpha - f - \beta| > t) \leq \mu(g_\gamma > t) \to 0$ mit $\gamma \nearrow$. Somit ist $(f_\alpha)_\alpha$ ein Cauchynetz im Maß. Die Konvergenz im Maß ist vollständig metrisierbar, also existiert $f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu)$ mit $f_\alpha \to f$ im Maß. Sei γ beliebig. Dann $h_\gamma := \sup_{\alpha \geq \gamma} |f_\alpha - f| \leq g_\gamma + |f_\gamma - f|$. Sei $0 \leq h \leq h_\gamma$ für alle γ und sei $t > 0$. Dann $\mu(h > 2t) \leq \mu(g_\gamma > t) + \mu(|f_\gamma - f| > t) \to 0$ mit Lemma 10.2. Also ist $f_\alpha \to f$ fast überall.
Falls das Maß nicht endlich ist, betrachte man Einschränkungen auf die Ω_n. □

Tatsächliche punktweise Konvergenz

Wir wollen nun untersuchen, wie der Begriff der verallgemeinerten "Konvergenz fast überall" mit der tatsächlichen "Konvergenz in fast allen Punkten" zusammenhängt. Zu Beginn ein naheliegender Satz.

Satz 10.4. *Sei $(f_\alpha)_\alpha \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mu; E)$ ein abzählbares Netz. Genau dann ist $f_\alpha \to f$ f.ü., wenn es das nach Vertreterwahl ist.*

Beweis. Wegen der Abzählbarkeit macht eine punktweise Betrachtung "fast überall" nach Vertreterwahl Sinn: bei Änderung der Vertreter hat man außerhalb einer Nullmenge nicht verändert. Die Behauptung folgt nun, da man Suprema und Infima punktweise nehmen kann. □

Eine nützliche Information bietet das folgende Resultat. Man beachte, dass eine Folge von Indizes $(\alpha_n)_n$ **kofinal** genannt wird, wenn zu jedem γ ein n existiert mit $\alpha_n \geq \gamma$.

Folgerung 10.5. *Sei $f_\alpha \to f$ f.ü. und sei $(f_{\alpha_n})_n$ eine "kofinale Teilfolge". Dann ist $f_{\alpha_n}(x) \to f(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$.*

Beweis. Man muß im Wesentlichen nur nachprüfen, dass auch $f_{\alpha_n} \to f$ f.ü., denn dann kann man Satz 10.4 anwenden. □

Ab jetzt wird es etwas spannender. Oft hat man nämlich halbwegs kanonische Repräsentanten $\tilde{f}_\alpha$ für die f_α, und da hätte man gerne eine Aussage der Form "Wenn $\tilde{f}_\alpha(x) \to f(x)$ für fast alle x, dann $f_\alpha \to f$ f.ü.", bzw. ihre Umkehrung. Unglücklicherweise sehe ich nicht, wie man so einen Satz beweisen sollte. Das Beste was mir einfällt, hat mit Stetigkeit zu tun.

Sei daher nun im folgenden (Ω, μ) ein topologischer Maßraum, wobei das Maß μ als *von innen regulär* angenommen wird.

Lemma 10.6. *Sei $(f_\alpha)_\alpha$ eine Familie positiver stetiger Funktionen auf Ω und $f(x) := \sup_\alpha f_\alpha(x) \in [0,\infty]$. Dann ist $f : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ messbar und es gilt $\sup_\alpha f_\alpha = f$ in $\mathfrak{M}(\Omega, \mu, [0,\infty])$.*

Beweis. Für alle $0 \leq t < \infty$ ist $\{f > t\}$ offen, also messbar. Daher ist f messbar. Sei $g := \sup f_\alpha$. Dann ist $g \leq f$ offensichtlich. Man wähle einen messbaren Vertreter $\tilde{g}$ für g. Angenommen $f \neq g$. Dann existieren $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$ so, dass $\{\tilde{g} \leq t_0 \,\wedge\, t_1 < f\}$ positives Maß hat. Da das Maß von innen regulär ist, gibt es ein Kompaktum K mit $\mu(K) > 0$ und $K \subset \{\tilde{g} \leq t_0\} \cap \{t_1 < f\}$. Zu $x \in K$ findet sich α_x mit $t_1 < f_{\alpha_x}(x)$. Aufgrund der Stetigkeit hat man dann $t_1 < f_{\alpha_x}(y)$ für $y \in U_x$ einer kleinen Umgebung von x. Aufgrund der Kompaktheit von K finden sich also $x_1, \ldots x_n$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Dies liefert $K \subset \bigcup_i \{t_1 < f_{\alpha_i}\} \cap \{\tilde{g} \leq t_0\}$. Wegen $\mu(K) > 0$ muss es i geben mit $\mu(\tilde{g} \leq t_0 \,\wedge\, t_1 < f_{\alpha_i}) > 0$. Dies steht im Widerspruch zu $\tilde{g} \geq f_{\alpha_i}$ fast überall. □

Lemma 10.7. *Sei $f_\alpha : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ messbar und $f_\alpha(x) \searrow f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Wenn $\inf_\alpha f_\alpha = 0$ in $\mathfrak{M}(\Omega, \mu)$, so ist $f(x) = 0$ für fast alle x.*

Man beachte, dass f selbst nicht messbar zu sein braucht.

Beweis. Indem man gleich eine Nullmenge ausschließt, kann man annehmen, dass $f_\alpha(x) \to f(x)$ für alle x ist. Da das Netz (f_α) fällt, ist für $n > 0$ jedenfalls $\{f > \frac{1}{n}\} \subset \{f_\alpha > \frac{1}{n}\}$ für alle α. Nach Lemma 10.2 gilt aber $\mu(f_\alpha > \frac{1}{n}) \to 0$ mit $\alpha \nearrow$. Dies zeigt(!), dass $\{f > \frac{1}{n}\}$ in einer Nullmenge enthalten ist. Damit ist auch $\{f \neq 0\}$ in einer Nullmenge enthalten.

□

Wir bringen die Ernte ein.

Satz 10.8. *Sei (Ω, μ) ein topologischer Maßraum mit von innen regulärem Maß μ. Sei $(f_\alpha)_\alpha \subset \mathbf{C}(\Omega)$ ein Netz und $f \in \mathfrak{M}(\Omega, \mu)$. Wenn*

$$f_\alpha \to f \ \mu\text{-fast überall (im verallgemeinerten Sinne),}$$

dann

$$f_\alpha(x) \to f(x) \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Die Umkehrung gilt, wenn das Netz kofinale Teilfolgen besitzt.

Beweis. Nach Voraussetzung und Satz 10.3 ist $(f_\alpha)_\alpha$ fast überall Cauchy. Das bedeutet $\inf_\gamma \sup_{\alpha,\beta\geq\gamma} |f_\alpha - f_\beta| = 0$. Wir setzen $g_\gamma := \sup_{\alpha,\beta\geq\gamma} |f_\alpha - f_\beta|$. Nach Lemma 10.6 ist $g_\gamma(x) = \sup_{\alpha,\beta\geq\gamma} |f_\alpha(x) - f_\beta(x)|$ für *alle* x. Ausserdem ist $g_\gamma(x) \searrow$ für alle x. Wenden wir nun Lemma 10.6 an, so sehen wir dass $0 = \inf_\gamma g_\gamma(x)$ für fast alle x ist. Das bedeutet, dass $(f_\alpha(x))_\alpha$ für fast alle x ein Cauchy-Netz ist. Also existiert eine Funktion g mit $f_\alpha(x) \to g(x)$ für fast alle x.
Wir müssen noch zeigen, dass $g = f$ fast überall ist. Sei $A := \{x \mid (f_\alpha(x))_\alpha \text{ konvergiert}\}$. Für alle $x \in \Omega, \alpha, \beta \geq \gamma$ gilt $g_\gamma(x) \geq |f_\alpha(x) - f_\beta(x)|$. Somit $g_\gamma(x) \geq |f_\alpha(x) - g(x)|$ für $x \in A$ und daher auch $g_\gamma(x) \geq \sup_{\alpha\geq\gamma} |f_\alpha(x) - g(x)|$ für $x \in A$. Für $t > 0$ hat man daher

$$\{|f - g| > 2t\} \cap A \subset \{g_\gamma > t\} \cup \{|f_\gamma - f| > t\}.$$

Mit Satz 10.3 schließt man, dass $\{|f - g| > 2t\} \cap A$ und dann auch $\{|f - g| > 0\} \cap A$ in einer Nullmenge, enthalten sein muß. Da $\Omega \backslash A$ auch in einer Nullmenge enthalten ist, folgt also $f = g$ fast überall. □

Bemerkung 10.9. Für Netze ohne kofinale Teilfolgen ist die Umkehrung in Satz 10.8 i.A. falsch. Um dies einzusehen betrachten wir den Maßraum $([0,1], \mu)$ mit $\mu := \lambda$ dem Lebesguemaß. Die Indexmenge I wird definiert als

$$I := \{(A, B) \subset [0,1] \mid A, B \text{ abgeschlossen, disjunkt und } \mu(A) = 0\}$$

mit lexikographischer Ordnung:

$$(A, B) \leq (C, D) \quad :\Longleftrightarrow \quad A \subset C \ \vee \ [(A = C) \wedge (B \subset D)].$$

Zu jedem Index $(A, B) \in I$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi_{(A,B)}$ mit $0 \leq \varphi_{(A,B)} \leq 1$, $\varphi_{(A,B)}(A) \subset \{0\}$ und $\varphi_{(A,B)}(B) \subset \{1\}$.
Nun gilt $\varphi_{(A,B)}(x) \to 0$ für alle $x \in [0,1]$. Tatsächlich ist $\varphi_{(A,B)}(x) = 0$ für $(\{x\}, \emptyset) \leq (A, B)$. Desweiteren ist

$$f_{(C,D)} := \sup_{(C,D)\leq(A,B)} \varphi_{(A,B)} = \mathbf{1}_{[0,1]\backslash C}.$$

Da C aber eine Nullmenge ist, hat man $f_{(C,D)} = 1$ fast überall, also $\inf_{(C,D)} f_{(C,D)} = 1$. Dies zeigt, dass $\varphi_{(A,B)} \not\to 0$ f.ü..

Literatur

[Bar] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, J. Wiley & Sons, Inc., 1995.

[Bau] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin Heidelberg 1990.

[Gra] L. Grafakos, *Fourier Analysis*, Buchmanuskript, 2002.

[Haa] M. Haase, *Kompendium zur Integrationstheorie*, Manuskript, Ulm 2003.

[Jos] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[Lan] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, GTM 142, Springer-Verlag, New York 1993.

[Que] B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1979.

[Rud] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2. Auflage, McGraw Hill, New York 1991.

[Wer] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1997.