Kompendium zur Integrationstheorie

von Markus Haase

Vorläufige Version
Februar 2003

Adresse des Autors: Abt. Angewandte Analysis
Helmholtzstraße 18
89069 Ulm

e-mail: haase@mathematik.uni-ulm.de

Vorwort

Der Name der Bücher zur Maß und Integrationstheorie ist Legion. Während der deutschsprachige Anteil dabei noch einigermaßen überschaubar ist, kann man beim angloamerikanischen schon fast von einem eigenen Genre sprechen. Neben den speziell dieser Thematik gewidmeten Büchern finden sich darüberhinaus noch Myriaden von einführenden Texten, die in den Anhängen von Lehrbüchern oder Monographien zur Funktionalanalysis oder zur Theorie Partieller Differentialgleichungen ihr bescheidenes Dasein fristen. Die Existenz dieser literarischen Underdogs zeigt das wahre Gesicht der Maß- und Integrationstheorie: sie ist ein unerlässliches Hilfsmittel für viele mathematische Gebiete.

Diese Situation ist m.E. gerade für diejenigen Leser einigermaßen unbefriedigend, die nicht *primär* an der Maßtheorie als eigener, sondern an ihr als Hilfsdisziplin interessiert sind. Die schwachbrüstigen Einführungen aus den Anhängen und Vorbemerkungen sagen naturgemäss zu wenig. Sie dienen mehr als bequeme Referenziermöglichkeit des Haupttextes denn als wirkliche Lernhilfe für den Studenten. Dieser muß mit jedem Buch über Funktionalanalysis wieder von vorne anfangen, die Maß- und Integrationstheorie zu entwickeln. Die Vielzahl der möglichen Ansätze, Formulierungen, Vorgehensweisen und Terminologien verlangt dabei eine beträchtliche Harmonisierungsarbeit.[1]

Ich bin mir bewußt, dass man an dieser Situation kaum etwas ändern kann. Kein Text kann für alle das letzte Wort sein; jederzeit kann ein Bedarf nach Verallgemeinerung entstehen, der nur dadurch gestillt werden kann, dass vorhandene Begriffe erweitert oder modifiziert werden. Jedes von mir neu gelernte Theorem kann das ganze Netz meines Wissens in neuem Licht erscheinen lassen, neue Formulierungen nötig machen.

In diesem Sinne ist der vorliegende Text ein Paradox, denn er gibt vor, Abhilfe zu verschaffen, wo er doch offensichtlich das Problem verstärkt: er ist eben ein weiterer Text, der den Studenten Maß- und Integrationstheorie präsentiert. Allerdings ist er weder eine Monographie oder ein Lehrbuch zur Maß- und Integrationstheorie, noch eine Kurzeinführung. Er ist ein **Kompendium**, d.h. eine Zusammenstellung von Themen und Resultaten. Er ist daher nicht den einem Lehrbuch eigenen Zwängen unterworfen. Insbesondere rechnet er mit einem Leser, der im Prinzip mit den Begriffen und Ergebnissen der Integrationstheorie vertraut ist und kann darum der *Systematik*, d.h. der der Überschaubarkeit dienenden Anordnung den Vorrang geben vor der Entwicklung der Ergebnisse zum Ziele des Vertrautwerdens.

Meine Vorstellung ist, dass die einzelnen Paragraphen des Kompendiums *Pfeiler* sind, die in den Morast unseres mathematischen (Un-)Wissens geschlagen werden, an denen sich jeweils weiteres Wissen anlagern kann und so der Sumpf der Integrationstheorie nach und nach für den Leser begehbar und verstehbar wird. Die Systematik ist so gewählt, dass man im Prinzip entlang dieses Kompendiums die Theorie erarbeiten kann. Wenn ein Vorgriff auf weiter unten explizit aufgeführte Resultate oder Begriffe unvermeidbar schien, habe ich dies kenntlich gemacht. Beispiele habe ich im wesentlichen vermieden, vor allem deshalb, weil das Einstreuen von Beispielen die *Organisation von Wissen* um die es mir hauptsächlich ging, erschwert. Mein hypothetischer Leser hat sowieso ein paar Beispiele zur Hand.

---

[1] N.B. Ich behaupte nicht, dass man diese Kurzeinführungen der Anhänge vermeiden kann. Allerdings kann der vorliegende Text als Vorschlag verstanden werden, es doch mal anders zu versuchen. Außerdem glaube ich, dass schon viel gewonnen ist, wenn man dem Studenten nicht nur mathematische Resultate präsentiert, sondern ihm auch dabei hilft, den jeweils in Rede stehenden Text auch in das einzuordnen, was ihm sonst noch im mathematisch-literarischen Leben begegnet.

Der letzte Abschnitt nimmt eine Sonderstellung in diesem Kompendium ein. Er bietet auf elementarem Niveau eine Konstruktion des des Oberflächenmaßes auf der Sphäre sowie einen Beweis des Divergenzsatzes für diesen Spezialfall. Bemerkenswert ist, dass man auf den sonst üblichen Apparat — Integration auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$ — verzichten kann. Unsere Darstellung folgt im Wesentlichen [Kra]. Diese Quelle dürfte allerdings nicht allgemein zugänglich sein und mir ist keine andere bekannt. Darum habe ich diesen Abschnitt ausführlicher gestaltet als die übrigen.
Ich habe die Maßtheorie fast ganz ausgeklammert, einerseits aus Zeitgründen, andererseits weil es mir hauptsächlich um die Integrationstheorie — und zwar aus der Sicht der Funktionalanalysis — zu tun war. Dass ich nicht von vorneherein alle Maßräume als σ-endlich vorausgesetzt habe, ist eine persönliche Idiosynkrasie. Ein wirklicher Nachteil der ganzen Unternehmung ist, dass ich nur skalare Integrationstheorie und nicht die Theorie der Bochner-Integration behandle. Dies hängt mit dem Kurs zusammen, für den dieses Kompendium allererst geschrieben wurde. Vielleicht wird eine zukünftige Auflage das Kompendium in diese Richtung ergänzen.

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Maßtheorie

Wir setzen die zentralen Begriffe der Maßtheorie, als da sind **σ-Algebra**, **Erzeuger** einer σ-Algebra, **Maß**, **messbare Abbildung**, **σ-endliche Menge** usf. als bekannt voraus.
Es ist eine Sache, Integrationstheorie bezüglich eines Maßes zu betreiben, und eine andere, sich überhaupt Maße zu beschaffen. Einer der möglichen Ansätze geht davon aus, dass man schon einen **Inhalt** auf einem kleineren Mengensystem, einem sog. **Ring** gegeben hat. Diesen Inhalt kann man dann auf eine kanonische Weise zu einem **äußeren Maß** auf der Potenzmenge des Raumes fortsetzen. Dann weist man eine (relativ grosse) σ-Algebra aus (die natürlich den anfänglich gegebenen Ring umfaßt), auf der das äußere Maß tatsächlich ein Maß ist (sog. **Carathéodory-Methode**). Diese σ-Algebra heißt σ-Algebra der **messbaren Mengen**.
Im Fall des Lebesguemaßes auf dem $\mathbb{R}^d$ geht man etwa vom Elementarvolumen halboffener Quader aus und definiert das äußere Maß auf $\mathfrak{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ durch

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_n |Q_n| \;\middle|\; Q_n \text{ ist Quader und } A \subset \bigcup_n Q_n\right\}$$

Die σ-Algebra der messbaren Mengen umfasst jedenfalls alle halboffenen Quader und damit dann schon alle offenen Mengen. Sie ist also größer als die **Borelsche** σ-Algebra des $\mathbb{R}^d$.

Satz 1. *Es gibt genau ein Maß λ auf der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ des $\mathbb{R}^d$ mit*

$$\lambda\left(\prod_{j=1}^d (a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

für alle $-\infty < a_j < b_j < \infty$ $(1 \le j \le d)$. Dieses Maß heißt das **Lebesguemaß**.

Weitere Eigenschaften des Lebesguemaßes werden in Abschnitt 11 behandelt.
Literatur: [Bau, Kap. I, §§1-4] oder [Bar, Chapter 3 und 11-13]. Natürlich auch [Els], dort aber sehr (zu) ausführlich.

§ 2 Integration positiver messbarer Funktionen

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Eine Eigenschaft **P** von Punkten aus Ω gilt "μ-f.ü.", falls es eine Menge $N \in \Sigma$ gibt mit $\mu(N) = 0$ und $\{x \in \Omega \mid \text{nicht } \mathbf{P}(x)\} \subset N$.
Eine positive Funktion $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ heißt **f.ü. messbar**, falls es eine messbare Funktion $g : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ derart gibt, dass $f = g$ μ-f.ü. ist. Für eine positive, f.ü. messbare Funktion f ist das Integral $\int f\, d\mu$ definiert durch

$$\int f\, d\mu := \int_0^\infty \mu\{f > t\}\, dt \in [0, \infty]$$

(Dies ist so zu lesen: Man wählt g messbar und $f = g$ f.ü. und definiert $\mu\{f > t\} := \mu\{g > t\}$.) Das Integral ist ein uneigentliches Riemannintegral. Hier ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften:

Satz 2. *In allen folgenden Aussagen sind f, g, f_n positive f.ü. messbare Funktionen.*

a) *Ist $A_j \in \Sigma$ und $c_j \geq 0$ für $1 \leq j \leq m$, so gilt $\int \sum_j^m c_j \mathbf{1}_{A_j} \, d\mu = \sum_j^m c_j \mu(A_j)$.*

b) *Ist $f = g$ f.ü., so ist $\int f = \int g$.*

c) *$\int (f + g) = \int f + \int g$ und $\int (\alpha f) = \alpha (\int f)$ für $\alpha \geq 0$.*

d) *Aus $0 \leq f \leq g$ folgt $\int f \leq \int g$.*

e) **(Monotone Konvergenz)** *Ist $0 \leq f_n \nearrow f$ so gilt $\int f_n \nearrow \int f$.*

f) **(Lemma von Fatou)** *$\int (\liminf_n f_n) \leq \liminf_n (\int f_n)$.*

g) *Die Mengenfunktion $A \longmapsto \int_A f$ ist ein Maß auf (Ω, Σ).*

h) *Es gilt genau dann $\int f = 0$, wenn $f = 0$ f.ü. ist.*

Beweis. b), d) und h) folgen direkt aus der Definition. Danach beweist man e), indem man ein Lemma über monotone Konvergenz von Riemannintegralen monotoner Funktionen benutzt. Teil a) wird zunächst für paarweise disjunkte A_j durch Rückgriff auf die Definition bewiesen. Der allgemeine Fall ergibt sich dann daraus durch "Disjunktifizierung". Damit hat man dann auch c) für Elementarfunktionen. Anschließend zeigt man c) allgemein mittels monotoner Approximation durch Elementarfunktionen (siehe unten das Lemma im Abschnitt 6) Das Lemma von Fatou und g) folgen leicht aus e). □

Bemerkung: Oft wird das Integral positiver Funktionen etwas anders definiert. Die Eigenschaften bleiben aber dieselben. Siehe [Bar, Abschnitt 4] oder [Bau, Kap. II, §§9-11 und Lemma 15.2].

Satz 3. *Sei f positiv und f.ü. messbar mit $\int f < \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *$\mu\{f \geq \alpha\} < \infty$ für alle $\alpha > 0$.*

b) *$\mu\{f > 0\}$ ist σ-endlich.*

c) *$f < \infty$ fast überall.*

d) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\mu(A) < \delta \implies \int_A f < \varepsilon$. Dies schreibt man auch $\lim_{\mu(A) \to 0} \int_A f = 0$.*

Beweis. a) folgt aus $\int f \geq \int_{\{f \geq \alpha\}} f \geq \alpha \mu\{f \geq \alpha\}$. b) folgt aus a). c) ist Übungsaufgaben 4Q in [Bar] und ist Satz 13.6 in [Bau]. d) beweist man durch Widerspruch, siehe [Bau, Satz 17.8]. □

§3 Die $\mathbf{L^p}$-Räume

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. $[0, \infty]$ f.ü. messbar. Man definiert

$$\left.\begin{array}{lcl} \|f\|_{\mathbf{L^p}} & := & \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty) \\ \|f\|_{\mathbf{L^\infty}} & := & \inf\{\|g\|_\infty \mid f = g \text{ f.ü.}\} \end{array}\right\} \in [0, \infty]$$

Damit setzt man für $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathbf{L^p}(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ f.ü. messbar und } \|f\|_{\mathbf{L^p}} < \infty\} / \sim$$
$$\text{wobei: } f \sim g \quad \text{gdw.} \quad f = g \text{ f.ü.}$$

Satz 4. *Seien $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. $[0, \infty]$ f.ü. messbar und sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit $1/p + 1/p' = 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen* *a)* **(Hölder'sche Ungleichung)** $\|fg\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} \|g\|_{\mathbf{L}^{p'}}$.

b) **(Minkowski'sche Ungleichung)** $\|f+g\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} + \|g\|_{\mathbf{L}^p}$.

c) $\|fg\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^\infty} \|g\|_{\mathbf{L}^p}$.

Dabei ist die Rechenregel $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ zu beachten.

Man schreibt oft $\|f\|_p$ statt $\|f\|_{\mathbf{L}^p}$ wobei man im Fall $p = \infty$ auf die Bedeutung im Kontext aufpassen muss. Die $\mathbf{L}^p$-Räume sind Banachräume (dies kann man aber erst beweisen, wenn man ein paar Konvergenzresultate (siehe unten) kennt). Wir geben hier noch eine Konsequenz der Hölderschen Ungleichung.

Satz 5. (Liapunov'sche Ungleichung) *Sei $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. Dann gilt $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$. Dabei ist $\theta \in [0,1]$ derart, dass $\theta/p + (1-\theta)/q = 1/r$. Inbesondere gilt*

$$\mathbf{L}^p \cap \mathbf{L}^q \subset \mathbf{L}^r \subset \mathbf{L}^p + \mathbf{L}^q.$$

Beweis. Die zweite Inklusion ergibt sich, wenn man $f = f\mathbf{1}_{(|f|>\alpha)} + f\mathbf{1}_{(|f|\leq\alpha)}$ schreibt mit $\alpha > 0$. Für die Liapunov'sche Ungleichung wende man Hölder auf $(|f|^p)^{\frac{r\theta}{p}}$ und $(|f|^q)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}$ an. □

Im Fall endlicher Maßräume hat man sogar:

Satz 6. *Sei (Ω, μ) ein endlicher Maßraum. Dann gilt $\mathbf{L}^p \supset \mathbf{L}^q$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Außerdem gilt $\lim_{p\to\infty} \mu(\Omega)^{-(1/p)} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

Beweis. Die Funktion $p \longmapsto \mu(\Omega)^{-(1/p)} \|f\|_p$ ist monoton steigend nach Hölder (Satz 2.10 in [Els]). Ebenfalls aus Hölder folgt, dass stets $\mu(\Omega)^{-(1/p)} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ ist. Angenommen, wir haben $\mu(\Omega)^{-(1/p)} \|f\|_p \leq c < \infty$ für alle $p < \infty$. Dann

$$(c+\varepsilon)^p \mu\{|f| \geq c+\varepsilon\} \leq \int_{\{|f|\geq c+\varepsilon\}} |f|^p \, d\mu \leq \int |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p \leq c^p \, \mu(\Omega)$$

für alle $\varepsilon > 0$ und alle p. Dies impliziert $\mu\{|f| \geq c+\varepsilon\} \leq (c/c+\varepsilon)^p \, \mu(\Omega)$ für alle p, und somit $\mu\{|f| \geq c+\varepsilon\} = 0$. Da ε beliebig war, gilt also $|f| \leq c$ f.ü.. □

Satz 7. *Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ f.ü. messbar und sei $1 \leq p < \infty$ und $1/p + 1/p' = 1$. Dann gilt*

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_\Omega fg \right| d\mu \;\middle|\; g \in \mathbf{L}^{p'},\, \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} \qquad (*)$$

für alle $f \in \mathbf{L}^p$. Falls das Maß σ-endlich ist, gilt $(*)$ auch mit $p = \infty$.

Beweis. Die eine Ungleichung folgt aus Hölder. Für die andere wählt man
$g := (\overline{f}/|f|)\,|f|^{p-1} \|f\|_p^{1-p}$ auf $\{f \neq 0\}$ und $g := 0$ sonst. Dann gilt $g \in \mathbf{L}^{p'}$, $\|g\|_{p'} = 1$ und $\int fg = \|f\|_p$. Sei nun $f \in \mathbf{L}^\infty$ und $0 < t < \|f\|_\infty$. Dann ist $\mu\{|f| > 0\} > 0$ und es gibt eine Folge von Mengen $A_n \nearrow \{|f| > 0\}$ mit $0 < \mu(A_n) < \infty$. Dann setzt man $g_n := (\overline{f}/|f|)\mathbf{1}_{A_n} \mu(A_n)^{-1}$. □

Literatur: [Bau, Kap. II, §14] oder [Els, Kap. IV, §1] für Hölder und Minkowski. Der Satz von Liapunov ist Lemma II.4.1 in [Wer]. Er impliziert, dass die Abbildung $p \longmapsto \|f\|_p$ logarithmisch konvex und somit jedenfalls stetig ist.

§ 4 Das Integral

Auf dem Raum $\mathbf{L^1}(\Omega, \mu)$ hat man auf folgende Weise ein lineares positives Funktional

$$\int . \, d\mu : \mathbf{L^1}(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$$

gegeben. Man schreibt $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ für gewisse positive, f.ü. messbare Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit $f_j \le |f|$ für jedes j. Dann definiert man

$$\int f \, d\mu := \left(\int f_1 - \int f_2 \right) + i \left(\int f_3 - \int f_4 \right)$$

und das ist (nach Satz 2) unabhängig von der Darstellung. Es gilt dann die **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int f \, d\mu \right| \le \int |f| \, d\mu = \|f\|_1 \, . \tag{1}$$

Dies bedeutet, dass das Integral ein *stetiges* Funktional auf $\mathbf{L^1}$ ist.

[Die Dreiecksungleichung ist trivial für reellwertige Funktionen. Falls f komplexwertig ist, benutzt man einen Trick: für jede komplexe Zahl a ist $|a| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{Re}(e^{it} a)$. Man rechnet dann $\mathrm{Re}\, e^{it} \int f = \mathrm{Re} \int e^{it} f = \int (\mathrm{Re}\, e^{it} f) \le \int |f|$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.]

§ 5 Konvergenzsätze

Satz 8. *Seien f_n und f f.ü. messbare $\mathbb{C}$-wertige Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *In $\mathbf{L^p}$ konvergiert jede Cauchyfolge.*

b) *Seien $f_n, f \in \mathbf{L^p}$ mit $\|f_n - f\|_p \to 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ derart, dass gilt:*

  1) *Es gibt ein $0 \le g \in \mathbf{L^p}$ mit $|f_{n_k}| \le g$ für alle k.*

  2) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $A_\varepsilon \in \Sigma$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, und f_{n_k} konvergiert auf $\Omega \setminus A_\varepsilon$ gleichmässig gegen f.*
  Inbesondere konvergiert f_{n_k} punktweise fast überall gegen f.

c) **(Satz von F.Riesz)** *Seien $1 \le p < \infty$ und $f_n, f \in \mathbf{L^p}$. Dann gilt:*

$$\text{Aus} \quad f_n \to f \text{ f.ü.} \quad \text{und} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \text{folgt} \quad \|f_n - f\|_p \to 0.$$

d) **(Satz über die majorisierte Konvergenz)** *Sei $1 \le p < \infty$, $f_n \in \mathbf{L^p}$ und $f_n \to f$ punktweise fast überall. Wenn es eine f.ü. messbare Funktion g so gibt, dass $|f_n| \le g$ (f.ü.) für alle n ist, so ist $f \in \mathbf{L^p}$ und $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

e) **(Monotone Konvergenz)** *Sei $1 \le p < \infty$ und $0 \le f_n \nearrow f$ mit $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. Dann ist $f \in \mathbf{L^p}$ und $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

f) *Sei $1 \le p \le \infty$ und $f_n \in \mathbf{L^p}$. Wenn $\sum_n \|f_n\|_p < \infty$, dann konvergiert die Reihe $\sum_n f_n$ in $\mathbf{L^p}$ und punktweise fast überall gegen eine Funktion $g \in \mathbf{L^p}$.*

g) **(Satz von Egoroff)** *Sei das Maß μ endlich und $f_n \to f$ punktweise fast überall. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge A_ε mit $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f_n \to f$ gleichmässig auf $\Omega \setminus A_\varepsilon$.*

h) **(Schwache Konvergenz)** *Sei* $1 < p < \infty$ *und* $f_n \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ *mit* $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. *Wenn* $f_n \to f$ *punktweise f.ü., so ist* $f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ *und man hat* $\int f_n g \to \int fg$ *für jedes* $g \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}'}$.

i) **(Satz von Radon-Riesz)** *Sei* $1 < p < \infty$ *und* $f_n, f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$. *Wenn* $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ *und* $\int f_n g \to \int fg$ *für alle* $g \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}'}$, *dann gilt* $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Beweis. a) und b) werden meist zusammen bewiesen, siehe etwa [Bar, Theorem 6.14] oder [Bau, Satz 15.7]. Der Satz von Riesz ist Satz 15.4 in [Bau]. e) ist eine direkte Konsequenz des Satzes von der Monotonen Konvergenz für positive Funktionen. Der Satz von der majorisierten Konvergenz ist Satz 15.6 in [Bau] bzw. Theorem 7.2 in [Bar]. Der Beweis von f) ergibt sich im Fall $p = 1$ aus e) indem man die Reihe $\sum |f_n|$ betrachtet. Im Fall $p > 1$ bemerkt man, dass $\bigcup_n \{f_n \neq 0\}$ eine σ-endliche Menge ist. Der Fall $p = 1$ liefert die absolute Konvergenz fast überall der Reihe $\sum_n f_n$ gegen eine Funktion in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$. Majorisierte Konvergenz erledigt die Konvergenz in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$. Der Satz von Egoroff ist Theorem 7.12 in [Bar], Übungsaufgabe 2 in §12 von [Bau] und Satz 3.5 in Kap. IV, §3 von [Els]. Der Satz über die schwache Konvergenz ist Satz 5.6 in Kap. IV, §5 von [Els]. Sein Beweis benutzt den Satz von Egoroff. Der Beweis des Satzes von Radon-Riesz ist tricky und findet sich in [Els, Kap. IV, Satz 5.10]. ☐

Eine einfache Anwendung des Satzes über die majorisierte Konvergenz ergibt das folgende Resultat.

Folgerung 8.1. *Seien* Ω_1, Ω_2 *metrische Räume und* μ *ein endliches Maß auf der Borel'schen* σ*-Algebra von* Ω_2. *Sei weiter* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig und beschränkt. Dann ist die Funktion*

$$\left(x \longmapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\,\mu(dy)\right) : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

ebenfalls stetig und beschränkt.

Bemerkung: Wir haben hier den Begriff der **Konvergenz im Maß** und den **Konvergenzsatz von Vitali** ausgelassen. Siehe dazu [Bar, Chapter 7] oder [Els, Kap. IV, §4 und Abschnitt 5.6]. Natürlich lässt sich Folgerung 8.1 viel allgemeiner formulieren, siehe [Bau, Lemma 16.1].

§ 6 Approximation

Die $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$-Räume sind Banachräume, also ist es sinnvoll, dichte Teilräume zu suchen, die aus Funktionen mit möglichst schönen Eigenschaften bestehen.
Wir nennen

$$\mathrm{E}(\Omega, \Sigma) := \mathrm{span}\{\mathbf{1}_A \mid A \in \Sigma\}$$
$$\mathrm{St}(\Omega, \mu) := \mathrm{St}(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathrm{span}\{\mathbf{1}_A \mid A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty\}$$

den Raum der **Elementar-** bzw. den Raum der **Treppenfunktionen**. Man beachte, dass für jedes $p < \infty$ die Äquivalenz $\mathbf{1}_A \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow \mu(A) < \infty$ richtig ist.

Lemma. *Sei* $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ *messbar. Setzt man*

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} (k + \frac{j-1}{n}) \mathbf{1}_{\{k + \frac{j-1}{n} < f \leq k + \frac{j}{n}\}}$$

so gilt $0 \leq f_n \nearrow f$ punktweise. Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz sogar gleichmäßig auf Ω.

Weil jede reellwertige Funktion in Positiv- und Negativteil zerlegt werden kann, ergibt sich daraus mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz:

Satz 9. *Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ f.ü. messbar. Dann gibt es eine Folge von Elementarfunktionen $f_n \in \mathrm{E}(\Omega, \Sigma)$ derart, dass $|f_n| \leq |f|$ und $f_n \to f$ punktweise fast überall (bzw. in $\|.\|_{\mathbf{L}^\infty}$, falls $f \in \mathbf{L}^\infty$ ist). Ist dabei $f \in \mathbf{L}^p$ für ein $p < \infty$, so gilt $f_n \in \mathrm{St}(\Omega, \mu)$ und $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Abgeschwächt formuliert:

Satz 10. *a) Der Raum $\mathrm{E}(\Omega, \Sigma)$ ist (gleichmäßig) dicht im Banachraum $\mathrm{BM}(\Omega, \Sigma)$ der beschränkten messbaren Funktionen auf (Ω, Σ), und er ist $\mathbf{L}^\infty$-dicht in $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mu)$.*

b) Der Raum $\mathrm{St}(\Omega, \mu)$ ist dicht in $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Der nächste Satz ist eine wichtige Anwendung der Approximation durch Treppenfunktionen. Er wird beim Beweis der Minkowski-Ungleichung für Integrale benötigt.

Satz 11. *Das Maß sei σ-endlich. Dann gilt für $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ und $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ f.ü. messbar:*

$$\|f\|_p = \sup\{\int_\Omega fg \mid 0 \leq g \in \mathrm{St}(\Omega, \mu),\ \|g\|_{p'} \leq 1\}.$$

Insbesondere gilt: Genau dann ist $f \in \mathbf{L}^p$, wenn die rechte Seite endlich ist.

Beweis. Die eine Ungleichung ist klar nach Hölder. Zum Beweis der anderen Ungleichung behandeln wir zunächst den Fall $p < \infty$. Man findet Elementarfunktionen $0 \leq f_n \nearrow f$. Da μ σ-endlich ist, kann man $f_n \in \mathrm{St}(\Omega, \mu)$ annehmen. Wie im Beweis zu Satz 7 wählt man die g_n zu den f_n. Dann sind die $g_n \geq 0$ und auch Treppenfunktionen. Aus Monotoner Konvergenz folgt

$$\|f\|_p = \sup_n \|f_n\|_p = \sup_n \int f_n g_n \leq \sup_n \sup_g \int f_n g = \sup_g \sup_n \int f_n g = \sup_g \int fg.$$

Nun sei $p = \infty$. Man kann $\|f\|_\infty > 0$ annehmen. Sei $0 < c < \|f\|_\infty$ und $A := \{f > c\}$. Dann ist jedenfalls $\mu(A) > 0$. Da das Maß σ-endlich ist, gibt es zumindest ein $B \subset A$ mit $0 < \mu(B) < \infty$. Setze $g := \mu(B)^{-1}\mathbf{1}_B$. Dann $g \in \mathrm{St}(\Omega, \mu)$, $0 \leq g$ und $\|g\|_1 = 1$. Desweiteren $\int fg = \mu(B)^{-1} \int_B f > c\mu(B)^{-1} \int_B \mathbf{1} > c$. Das ergibt die Behauptung. □

Bemerkung: 1. Man kann den letzten Satz auf $\mathbb{C}$-wertige Funktionen ausweiten. 2. Ohne eine gewisse Forderung an das Maß ist der Satz falsch.

Oft ist der Raum der Treppenfunktionen immer noch zu groß. Zum Beispiel möchte man im Fall von Produktmaßen (siehe Abschnitt 7) sich lieber auf Treppenfunktionen beschränken, die aus charakteristischen Funktionen der Quadermengen aufgebaut sind. Dabei hilft der folgende Satz.

Satz 12. *Sei $\mathcal{R} \subset \Sigma$ ein Ring, der die folgenden Eigenschaften hat:*

1) $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

2) Es gibt $(\Omega_n)_n \subset \mathcal{R}$ so, dass $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ ist.
3) $\sigma(\mathcal{R}) = \Sigma$.

Dann ist der Raum $\operatorname{span}\{\mathbf{1}_A \mid A \in \mathcal{R}\}$ *dicht in* $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu)$ *für jedes* $1 \le p < \infty$.

Beweis. Um die Dichtheitsaussage zu zeigen, reicht es, die folgende Aussage beweisen:

$$\forall\, A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{R} : \left\| \mathbf{1}_A - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{B_j} \right\|_p^p < \varepsilon$$

Man definiert zunächst

$$\mathcal{R}_n := \{B \in \mathcal{R} \mid B \subset \Omega_n\} \text{ und } \Sigma_n := \{A \in \Sigma \mid \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathcal{R}_n : \mu(A \triangle B) < \varepsilon\}.$$

Dann ist Σ_n eine σ-Algebra auf Ω_n und es gilt $\Sigma \subset \{A \mid \forall n \in \mathbb{N} : A \cap \Omega_n \in \Sigma_n\}$ wegen Forderung 3). Man kann die Ω_n als paarweise disjunkt annehmen. Sei $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem n ein $B_n \in \mathcal{R}_n$ mit $\mu((A \cap \Omega_n) \triangle B_n) < \varepsilon 2^{-n}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{1}_A - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{B_j} \right\|_p^p &= \left\| \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{\bigcup_1^m B_j} \right\|_p^p = \mu(A \triangle \bigcup_1^m B_j) \\
&\le \mu(A \triangle \bigcup_1^m (A \cap \Omega_j)) + \sum_1^m \mu((A \cap \Omega_j) \triangle B_j) \\
&\le \mu(A \triangle \bigcup_1^m (A \cap \Omega_j)) + \varepsilon < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

für m hinreichend groß. □

Bemerkung: Satz 12 und sein Beweis ist Chapter VI, §6 von [Lan].

Folgerung 12.1. *Die Menge* $\{\mathbf{1}_Q \mid Q$ *halboffener Quader*$\}$ *ist total in* $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ *für jedes* $1 \le p < \infty$.

Natürlich kann man statt halboffener Quader auch offene oder abgeschlossene oder nur welche mit rationalen Eckpunkten nehmen.

Folgerung 12.2. *Für* $1 \le p < \infty$ *ist der Raum* $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ *separabel.*

§ 7 Integration auf Produkträumen

Gegeben seien nun *zwei* Maßräume $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$. Man bildet den Produktraum $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ und die **Produkt-σ-Algebra**

$$\Sigma := \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 := \sigma\{A \times B \mid A \in \Sigma_1,\ B \in \Sigma_2\}$$

die von den "Quadermengen" erzeugt wird. Wir nehmen zusätzlich an, dass beide Maße μ und ν σ-endlich sind.

Satz 13. (Tonelli)
Seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $f : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann ist für jedes $x \in \Omega_1$ der Schnitt $f(x, .) : \Omega_2 \longrightarrow [0, \infty]$ messbar und die Abbildung

$$\left(x \longmapsto \int_{\Omega_2} f(x, .)\, d\nu \right) : \Omega_1 \longrightarrow [0, \infty]$$

ist messbar. Analoges gilt für die Schnitte bezüglich der zweiten Variablen. Schließlich hat man noch

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\,\nu(dy)\,\mu(dx) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\,\mu(dx)\,\nu(dy)$$

In der Maßtheorie zeigt man dann, dass es genau ein Maß λ auf (Ω,Σ) derart gibt, dass $\lambda(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$ für alle $A\in\Sigma_1$, $B\in\Sigma_2$ gilt. Man schreibt $\lambda := \mu\otimes\nu$ und nennt es das **Produktmaß** von μ und ν.

Satz 14. *Sei $\lambda = \mu\otimes\nu$ und $C\in\Sigma$ eine λ-Nullmenge. Dann ist für μ-fast alle $x\in\Omega_1$ der Schnitt*

$$C_x := \{y\in\Omega_2 \mid (x,y)\in C\}\in\Sigma_2$$

eine ν-Nullmenge.

Hat man eine Funktion $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ oder $[0,\infty]$, die λ-f.ü. messbar ist, so zeigen die beiden obigen Sätze, dass für μ-fast alle x der Schnitt $f(x,.)$ dann ν-f.ü. messbar ist.

Satz 15. (Fubini)
Sei $f\in\mathbf{L^1}(\Omega,\mu\otimes\nu)$. Dann ist $f(x,.)\in\mathbf{L^1}(\Omega_2,\nu)$ für μ-fast alle $x\in\Omega_1$ und die Vorschrift

$$x\longmapsto\int_{\Omega_2} f(x,.)\,d\nu$$

definiert ein Element von $\mathbf{L^1}(\Omega_1,\mu)$. Analoges gilt für die zweite Variable. Schließlich gilt

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\,\nu(dy)\,\mu(dx) = \int_\Omega f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\,\mu(dx)\,\nu(dy)$$

Weil beide Maße σ-endlich sind, folgt aus Satz 12 sofort:

Satz 16. *Sei $1\le p<\infty$. Dann ist der Raum*

$$\operatorname{span}\{\mathbf{1}_{A\times B} \mid A\in\Sigma_1,\ B\in\Sigma_2,\ \mu(A)<\infty,\ \nu(B)<\infty\}$$

dicht in $\mathbf{L^p}(\Omega,\mu\otimes\nu)$.

Satz 17. (Minkowski-Ungleichung für Integrale)
Sei $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ oder $[0,\infty]$ $\mu\otimes\nu$–fast überall messbar und $1\le p<\infty$. Dann gilt

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|f(x,y)|\ \nu(dy)\right)^p\mu(dx)\right)^{1/p} \le \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)|^p\ \mu(dx)\right)^{1/p}\nu(dy)$$

Beweis. Hier eine Beweisanleitung: Man kann annehmen, dass die rechte Seite endlich und $f\ge 0$ ist. Zunächst sichert man sich mithilfe des Satzes 11 die Endlichkeit der linken Seite. Dann schreibt man für festes x den Term $(\int_2 f(x,y)dy)^p$ als Produkt:

$$(\int_2 f(x,y)dy)^p = (\int_2 f(x,z)dz)^{(p-1)}(\int_2 f(x,y)dy) = \int_2(\int_2 f(x,z)dz)^{(p-1)} f(x,y)\,dy.$$

Man integriert nach x und wendet erst Tonelli und dann Hölder an:

$$\begin{aligned}
\int_1 (\int_2 f(x,y)dy)^p\, dx &\leq \int_2 \left(\int_1 (\int_2 f(x,z)\, dz)^{(p-1)} f(x,y)\, dx \right) dy \\
&\leq \int_2 \left[\left(\int_1 (\int_2 f(x,z)\, dz)^{p'(p-1)}\, dx \right)^{(1/p')} \left(\int_1 f(x,y)^p\, dx \right)^{(1/p)} \right] dy \\
&= \left(\int_1 (\int_2 f(x,z)\, dz)^{p'(p-1)}\, dx \right)^{(1/p')} \int_2 \left(\int_1 f(x,y)^p\, dx \right)^{(1/p)} dy \\
&= \left(\int_1 (\int_2 f(x,y)\, dy)^p\, dx \right)^{(1-1/p)} \int_2 \left(\int_1 f(x,y)^p\, dx \right)^{(1/p)} dy.
\end{aligned}$$

Da beide Faktoren endlich sind, folgt die Behauptung. □

Literatur: Der völlig kanonische Stoff findet sich in [Bar, Chap. 11] und [Bau, §23 und §24]. Hier ist der Satz von Fubini im wesentlichen ein Korollar zu Tonelli, indem man die Funktionen in Positiv- und Negativteil zerlegt. Einen alternativen Beweis des Satzes von Fubini mittels Approximation, der auch im vektorwertigen Fall funktioniert, gibt [Lan, Chap. 6, §8]. Obwohl die Minkowski-Ungleichung für Integrale von zentraler Bedeutung für die Analysis ist, wird sie weder in [Bar] noch in [Bau], ja nicht mal in [Els] erwähnt. In [Rud] ist sie wenigstens eine Übungsaufgabe (Ex. 16 in Chap. 8). Darum hier die relativ ausführliche Beweisanleitung.

§ 8 Komplexe Maße und der Satz von Radon-Nikodym

Ein **komplexes Maß** auf Σ ist eine Abbildung $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ so, dass folgende zwei Eigenschaften gelten:

a) $\nu(\emptyset) = 0$.

b) Ist $(A_n)_n \subset \Sigma$ paarweise disjunkt, so konvergiert die Reihe $\sum_n \nu(A_n)$ unbedingt gegen $\nu(\bigcup_n A_n)$.

Zu einem komplexen Maß ν bildet man ein positives, endliches Maß $|\nu|$ durch

$$|\nu|(A) := \sup\{\sum_n |\mu(A_n)| \mid (A_n)_n \text{ paarweise disjunkt, } \bigcup_n A_n = A\}$$

Das Maß $|\nu|$ heißt **Totalvariation** von ν. Die komplexen Maße auf (Ω, Σ) bilden einen Banachraum bezüglich der Norm $\|\nu\| := |\nu|(\Omega)$.

Sei ν ein komplexes oder auch ein positives Maß auf Σ. Dann heißt ν **absolutstetig** beüglich μ, falls $\nu(A) = 0$ ist für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$.

Satz 18. (Radon-Nikodym)
Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Sei ν ein komplexes bzw. positives und σ-endliches Maß auf Σ. Wenn ν absolutstetig bzgl. μ ist, so gibt es eine messbare Funktion $f \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu)$ bzw. $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ derart, dass

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad (A \in \Sigma)$$

ist. Die Funktion f ist dadurch μ-f.ü. eindeutig bestimmt.

Ein f wie im Satz von Radon-Nikodym heißt **Dichtefunktion** von ν bezüglich μ. Man schreibt manchmal $\nu = f\mu$ oder $\nu = \mu_f$ (siehe Abschnitt 9).
Literatur: Man kann den Satz von Radon-Nikodym eher maßtheoretisch angehen, wie das [Bar, Chap. 8], [Bau, §17] und [Els, Kap. VII, §2] tun, oder eher funktionalanalytisch im Rückgriff auf den Satz von Riesz-Frechet wie in [Rud, Chap. 6]. Dort findet sich auch eine vorzügliche Einführung in die Theorie der komplexen Maße.

Wir lassen hier die eher maßtheoretisch interessanten **Zerlegungssätze von Hahn, Jordan und Lebesgue** aus. Man findet sie z.B. in Chapter 8 von [Bar].

§ 9 Integration nach Bildmaßen und nach Maßen mit Dichten

Im Satz von Radon-Nikodym wurden diejenigen Maße auf (Ω, Σ) charakterisiert, die eine Dichte bezüglich μ besitzen. Der nächste Satz zeigt, wie man nach solchen Maßen integriert.

Satz 19. *Sei $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Das Maß μ_f auf Σ sei definiert durch*

$$\mu_f(A) := \int_A f \, d\mu.$$

Sei $g : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ μ_f-fast überall messbar. Dann ist fg μ-fast überall messbar und es gilt

$$\int g \, d(\mu_f) = \int fg \, d\mu. \tag{2}$$

Für $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ μ_f-f.ü. messbar und $1 \leq p < \infty$ ist

$$g \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega, \mu_f) \quad \Longleftrightarrow \quad gf^{1/p} \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega, \mu),$$

und es gilt (2) *im Fall $p = 1$.*

Beweis. Der Beweis kann einfach durch Approximation mit Elementarfunktionen geführt werden. Der entscheidende Punkt, der vorher zu klären ist, betrifft die fast-überall-Gleichheit. Ist $h = g$ μ_f-f.ü., so gibt es eine μ_f-Nullmenge N mit $\{h \neq g\} \subset N$. Dann ist aber $0 = \int \mathbf{1}_N f$ und das bedeutet, dass $\mu\{\mathbf{1}_N f \neq 0\} = 0$ ist. Nun ist aber $\{gf \neq hf\} \subset \{g \neq h\} \cap \{f \neq 0\} \subset \{\mathbf{1}_N f \neq 0\}$. Dies zeigt, dass $fg = fh$ μ-fast überall ist. □

Seien (Ω', Σ') ein weiterer Messraum und $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ messbar, d.h. es gilt $\varphi^{-1}(A) \in \Sigma$ für jedes $A \in \Sigma'$. Durch $\varphi[\mu](A) := \mu(\varphi^{-1})$ ist ein Maß auf Σ' erklärt, das sogenannte **Bildmaß** von μ unter φ.

Satz 20. *Sei $f : \Omega' \longrightarrow [0, \infty]$ $\varphi[\mu]$-fast überall messbar. Dann ist $f \circ \varphi$ μ-fast überall messbar und es gilt*

$$\int f \, d(\varphi[\mu]) = \int f \circ \varphi \, d\mu \tag{3}$$

Für $f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ $\varphi[\mu]$-f.ü. messbar und $1 \leq p < \infty$ ist

$$f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega', \varphi[\mu]) \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ \varphi \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega, \mu),$$

und es gilt (3) *im Fall $p = 1$.*

Beweis. Auch hier wird der Fall $f \geq 0$ durch Approximation mit Elementarfunktionen erledigt und der $\mathbb{C}$-wertige Fall darauf zurückgespielt. Nur die elementaren Sachverhalte über positive messbare Funktionen werden benötigt. $\square$

Literatur: Die Beweise der beiden Sätze sind so simpel, dass man sich kaum traut, auf Literatur zu verweisen. Die Standardreferenz ist [Bau, §17 und §19].

§ 10 Der Dualraum von $\mathbf{L}^p$

Sei $1 \leq p < \infty$ und $1/p + 1/p' = 1$. Ist $g \in \mathbf{L}^{p'}$ so wird durch

$$l_g = (f \longmapsto \int_\Omega fg\, d\mu) : \mathbf{L}^p(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathbf{L}^p$ definiert (Hölder-Ungleichung!).

Satz 21. *Sei $1 \leq p < \infty$ und das Maß μ sei σ-endlich. Dann ist die Abbildung*

$$(g \longmapsto l_g) : \mathbf{L}^{p'}(\Omega, \mu) \longrightarrow (\mathbf{L}^p(\Omega, \mu))'$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Bemerkung: Die Isometrieeigenschaft folgt aus Satz 7. Im Fall $1 < p < \infty$ gilt die Behauptung auch für nicht σ-endliche Maße. Für $p = 1$ ist eine gewisse Bedingung an das Maß aber notwendig. Beweise für Satz 21 finden sich in [Bar, 8.13-8.15], [Els, Kap. VII, §3, Abschnitt 1] und [Rud, Theorem 6.16].

Folgerung 21.1. *Für $1 < p < \infty$ ist der Raum $\mathbf{L}^p(\Omega, \mu)$ reflexiv.*

Beweis. Sei $\Phi : (\mathbf{L}^p)' \longrightarrow \mathbb{C}$ ein stetiges, lineares Funktional. Nach Satz 21 ist $l : \mathbf{L}^{p'} \longrightarrow (\mathbf{L}^p)'$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\Phi \circ l : \mathbf{L}^{p'} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Wieder nach Satz 21 gibt es ein $g \in \mathbf{L}^p$ mit $\Phi(l_f) = \int gf$ für alle $g \in \mathbf{L}^{p'}$. Das bedeutet aber $\Phi(\varphi) = \varphi(g)$ für alle $g \in \mathbf{L}^p$. $\square$

§ 11 Eigenschaften des Lebesguemaßes

In diesem Abschnitt stellen wir weitere Eigenschaften des Lebesguemaßes zusammen. Zuerst wenden wir uns der eindimensionalen Situation zu.

Satz 22. *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist der Raum*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[a,b] := \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \mid & \textit{ es gibt eine Zerlegung } a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b \\ & \textit{und Werte } c_j \textit{ mit } f \equiv c_j \textit{ auf } (t_{j-1}, t_j) \textit{ für } 1 \leq j \leq m \} \end{aligned}$$

dicht in $\mathbf{L}^p[a, b]$ für jedes $1 \leq p < \infty$. Dasselbe gilt für den Raum $\mathbf{C}[a, b]$ der stetigen Funktionen auf $[a, b]$. Insbesondere ist $\mathbf{L}^p[a, b]$ separabel für $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Die erste Behauptung ist i.W. die Folgerung zu Satz 12. Die zweite ergibt sich, weil man jede stetige Funktion gleichmäßig durch Treppen, und jede Treppe in der p-Norm durch stetige (sogar stückweise affine) Funktionen approximieren kann. Die letzte Behauptung ist eine unmittelbare Konsequenz der ersten. $\square$

Die Verbindung zum Riemannintegral wird durch den folgenden Satz hergestellt.

Satz 23. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist f Riemannintegrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Lebesgue-Nullmenge ist. In diesem Fall ist f λ-f.ü. messbar und das Riemannintegral und das Lebesgueintegral von f stimmen überein.*

Beweis. Siehe [Els, Kap/ IV, §6] ☐

Der nächste Satz fasst allgemeine Eigenschaften des Lebesguemaßes zusammen.

Satz 24. *Für das Lebesguemaß λ auf dem $\mathbb{R}^d$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

a) **(Translationsinvarianz)** *Das Lebesguemaß ist translationsinvariant, d.h. es gilt $\lambda(A) = \lambda(A+b)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und alle $b \in \mathbb{R}^d$. Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, das endlich auf kompakten Mengen ist, so existiert $\alpha \geq 0$ mit $\mu = \alpha\lambda$.*

b) Ist $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ linear, so gilt $\lambda(TA) = |\det T|\, \lambda(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

c) **(Regularität)** *Es gilt*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subset A,\ K \textit{ kompakt}\} = \inf\{\lambda(O) \mid A \subset O,\ O \textit{ offen}\}$$

für alle $A \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

d) Es ist $(\mathbb{R}^{d+e}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d+e}), \lambda^{d+e}) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d) \otimes (\mathbb{R}^e, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^e), \lambda^e)$.

e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz. Ist $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist auch $\varphi(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis. Die Translationsinvarianz ergibt sich direkt aus der Definition des Lebesguemaßes, wie wir sie anfangs skizziert haben, siehe [Bar, Theorem 14.7], [Bau, Satz 8.1] und [Els, Kap. III,Satz 2.1]. Teil b) wird mithilfe der Eindeutigkeitsaussage in a) bewiesen: das Maß $B \longmapsto \lambda(T^{-1}B)$ ist translationsinvariant, also existiert genau ein $c(T)$ mit $\lambda(T^{-1}B) = c(T)\lambda(B)$ für alle B. Man beweist leicht $c(S \circ T) = c(S)c(T)$. Indem man die Einheitskugel einsetzt, findet man $c(T) = 1$ für alle orthogonalen Matrizen. Für Diagonalmatrizen D zeigt man $c(D) = |\det D|^{-1}$, indem man den Einheitsquader einsetzt. Den Rest erledigt man mit linearer Algebra, siehe [Els, Kap.III, §2].
Die äußere Regularität des Lebesguemaßes (die zweite Gleichheit in c)) ergibt sich aus der Definition des Lebesguemaßes, siehe [Bar, Lemma 15.1]. Die innere Regularität beweist man dann folgendermaßen: zuerst macht man sich klar, dass man o.B.d.A. annehmen kann, dass $A \subset Q$ für einen abgeschlossenen Quader gilt. Dann wendet man die äußere Regularität auf $Q \setminus A$ an, vgl. [Bar, Theorem 15.6.].
Die Aussage in d) ist trivial, e) folgt leicht aus der Definition des Lebesguemaßes via Quaderüberdeckungen, siehe [Lan, Lemma 1.1. in Chapter XXI]. ☐

Wir wenden uns nun eher funktionalanalytischen Themen zu. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und definiere

$$\mathbf{C_c}(\Omega) := \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}, \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt und } \operatorname{supp}(f) \subset \Omega\}$$

mit $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{f \neq 0\}}$.

Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_n \subset \mathbf{C_c}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1) $\mathbf{1}_K \leq f_n \leq \mathbf{1}$ *für alle n.*
2) $f_n \to \mathbf{1}_K$ *punktweise.*
3) *Es existiert $L \subset \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp}(f_n) \subset L$ für alle n.*

Beweis. Sei $U_n := B_{1/n}(K) := \{x \mid \operatorname{dist}(x, K) < \frac{1}{n}\}$. Dann ist U_n offen und relativ kompakt mit $\overline{U_{n+1}} \subset U_n \subset \Omega$ für große n. Setze $f_n := \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus U_n)/(\operatorname{dist}(x, K) + \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus U_n))$. ☐

Satz 25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Der Raum $\mathbf{C_c}(\Omega)$ ist dicht in $\mathbf{L^p}(\Omega, \lambda)$ für alle $1 \leq p < \infty$.*
b) *Der Raum $\mathbf{L^p}(\Omega, \lambda)$ ist separabel für alle $1 \leq p < \infty$.*
c) *Sei $f \in \mathbf{L^1_{loc}}(\Omega, \lambda)$. Dann gelten die Aussagen:*
   1) *Wenn $\int_Q f \, d\lambda = 0$ für alle kompakten Quader $Q \subset \Omega$, dann ist $f = 0$ λ-fast überall.*
   2) *Wenn $\int f\varphi \, d\lambda = 0$ für alle $\varphi \in \mathbf{C_c}(\Omega)$, dann ist $f = 0$ λ-fast überall.*

Beweis. Nach der Folgerung 12.1 ist $\{\mathbf{1}_K \mid K \text{ kompakt}, \ K \subset \Omega\}$ total in $\mathbf{L^p}(\Omega)$. Mit dem Lemma sieht man aber, dass man jedes $\mathbf{1}_K$ durch Funktionen in $\mathbf{C_c}(\Omega)$ in $\mathbf{L^p}$ approximieren kann. Teil b) wurde schon in Folgerung 12.2 für $\Omega = \mathbb{R}^d$ vermerkt. Es ist aber kanonisch $\mathbf{L^p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$.
Wir zeigen c). Teil 2) folgt aus 1), wenn man $\mathbf{1}_Q$ wie im obigen Lemma durch stetige Funktionen approximiert. Zum Beweis der Aussage in 1) kann man o.B.d.A. $f \in \mathbf{L^1}$ annehmen. Dann zeigt man, dass die Menge $\{A \mid \int_A f = 0\}$ eine σ-Algebra ist. Weil die Quader einen Erzeuger der Borelalgebra bilden, hat man $\int_A f \, d\lambda = 0$ für alle $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$. Daraus folgt $f = 0$ fast überall. ☐

Als nächstes studieren wir die **Translationsoperatoren** τ_h, definiert durch

$$\tau_h f := (x \longmapsto f(x - h)) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{4}$$

für $h \in \mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$. Aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes (Satz 24, Teil a)) gilt

Lemma.

a) *f ist genau dann (f.ü.) messbar, wenn es $\tau_h f$ ist.*
b) *Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt: $\quad f \in \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d) \iff \tau_h f \in \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$. In diesem Fall ist $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$.*
c) *Die Abbildung $(h \longmapsto \tau_h) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d))$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}^d$ in die Gruppe der isometrischen Isomorphismen auf $\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$.*

Satz 26. (Starke Stetigkeit der Translationsgruppe)
Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Abbildung

$$(h \longmapsto \tau_h f) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$$

stetig.

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Normbeschränktheit der Operatoren τ_h muss man die Stetigkeit nur auf einem dichten Teilraum beweisen. Für $f \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$ ist sie aber trivial. ☐

Als letztes formulieren wir noch den wichtigen

Satz 27. (Transformationssatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : \Omega \longrightarrow \varphi\Omega$ ein $\mathbf{C^1}$-Diffeomorphismus.[2] *Ist $f : \varphi\Omega \longrightarrow [0, \infty]$ λ-fast überall messbar, so gilt*

$$\int_{\varphi\Omega} f \, d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) \left|\det D\varphi\right| \, d\lambda \tag{5}$$

Ist $f : \varphi\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ f.ü. messbar, so gilt

$$f \in \mathbf{L^1}(\varphi\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad (f \circ \varphi) \left|\det D\varphi\right| \in \mathbf{L^1}(\Omega)$$

und es gilt ebenso (5).

Bemerkung: Man kann den Sachverhalt des Transformationssatzes auch so ausdrücken: Das **Bildmaß** von $\lambda_{\varphi\Omega}$ unter φ^{-1} (das ist ein Maß auf Ω) hat die **Dichte** (siehe Absschnitt 9 $|\det D\varphi|$ bezüglich λ_Ω.

Literatur: In [Els, Kap. V, §4] ist der Transformationssatz bewiesen. Einen sehr schönen Beweis findet man in Kap. IV, §2 des Buches [Bro]. Er basiert auf dem Satz von Fubini und der Tatsache, dass der Satz in Dimension 1 elementar ist.

Bemerkung: Dies ist natürlich nicht alles, was man aus der Sicht der Analysis zum Lebesguemaß sagen kann. Zu erwähnen ist etwa der **Satz von Sard** über das Maß der Menge kritischer Punkte einer stetig differenzierbaren Abbildung (siehe [Els, Kap. V, §4]). Die Transformationsformel findet weitreichende Verwendung in der Theorie der **Integration auf Mannigfaltigkeiten**. Man kann zudem mit ihrer Hilfe einen Beweis des **Fixpunktsatzes von Brouwer** führen.

§ 12 Topologische Maßtheorie

Sei Ω ein topologischer Hausdorff Raum. Jedes Maß μ auf der Borelschen σ-Algebra von Ω heißt ein **Borelmaß** auf Ω. Das Borelmaß heißt **lokal-endlich**, falls jeder Punkt $x \in \Omega$ eine Umgebung U besitzt mit $\mu(U) < \infty$. (Dann haben jedenfalls kompakte Teilmengen von Ω endliches Maß.)
Ein lokal-endliches Borelmaß μ heißt ein **Radonmaß**, falls es **von innen regulär ist**, d.h., falls

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, \ K \text{ kompakt}\}$$

für alle $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ ist. Es heißt **von außen regulär**, falls

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \mid A \subset O, \ O \text{ offen}\}$$

für alle $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ ist. Es heißt **regulär**, falls es sowohl von innen als auch von außen regulär ist.

In der topologischen Maßtheorie spielen zwei Klassen von topologischen Räumen eine besondere Rolle, die **lokalkompakten** und die **polnischen**

[2] Dann ist auch $\varphi\Omega$ offen!

Räume. Jede offene und auch jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist *beides*, lokalkompakt *und* polnisch.

Lokalkompakte Räume

Ein topologischer Raum Ω heißt **lokalkompakt**, falls er Hausdorff'sch ist und jeder Punkt eine relativ-kompakte Umgebung besitzt, d.h.

$$\forall\, x \in \Omega\ \exists\, U \subset \Omega \text{ offen} : x \in U \text{ und } \overline{U} \text{ kompakt.}$$

In diesem Fall besitzt jeder Punkt schon eine *Umgebungsbasis* aus relativ-kompakten Mengen, siehe [Que], Satz 8.17.

Ist Ω ein topologischer Raum, so bezeichnen wir mit $\mathbf{C_c}(\Omega)$ den Raum der stetigen Funktionen, die kompakten Träger haben, i.e.,

$$\mathbf{C_c}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt}\}$$

mit $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{f \neq 0\}}$. Die Schreibweise

$$K \prec \varphi \prec O$$

soll bedeuten, dass $\varphi \in \mathbf{C_c}(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ auf K und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset O$ ist. Man bemerke, dass $\mathbf{C_c}(\Omega) = \mathbf{C}(\Omega)$ ist, wenn Ω schon kompakt ist.

Satz 28. (Urysohn)
Sei Ω lokalkompakt, $K \subset \Omega$ kompakt und $O \subset \Omega$ offen. Wenn $K \subset O$ ist, so gibt es ein $\varphi \in \mathbf{C_c}(\Omega)$ mit $K \prec \varphi \prec O$.

Beweis. Man kann annehmen, dass O relativ-kompakt ist. Dies sieht man so: Zu jedem $x \in K$ gibt es eine relativ-kompakte offene Menge U_x, mit $x \in U_x \subset O$. Endlich viele der U_x — etwa $U_1, \ldots, U_m$ — überdecken K, da dieses kompakt ist. Dann ist $K \subset U := \bigcup_{i=1}^n U_i \subset O$ und U ist relativ-kompakt.
Für den Fall, dass Ω sogar ein metrischer Raum ist, ist der Beweis nun ganz einfach. Zuerst findet man $\delta > 0$ mit $\overline{B_\delta(K)} \subset O$. Dann definiert man $\varphi(x) := 1 - \operatorname{dist}(x, K)/(\operatorname{dist}(x, K) + \operatorname{dist}(x, \Omega \setminus B_\delta(K)))$. Für den allgemeinen Fall siehe [Rud, Lemma 2.12]. □

Folgerung 28.1. *Sei Ω lokalkompakt. Der Abschluß von $\mathbf{C_c}(\Omega)$ im Raum $\mathbf{C^b}(\Omega)$ aller stetigen beschränkten Funktionen bezüglich der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ ist*

$$\begin{aligned}\mathbf{C_0}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid\ & f \textit{ ist stetig und zu jedem } \varepsilon > 0 \\ & \textit{gibt es } K \subset \Omega \textit{ kompakt mit } |f(x)| < \varepsilon \textit{ für alle } x \in \Omega \setminus K\}\end{aligned}$$

Sei Ω lokalkompakt. Ein lokal-endliches Borelmaß μ auf Ω heißt **σ-regulär**, falls

1) μ von außen regulär ist und
2) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}$ für $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ zumindest dann gilt, wenn A offen oder σ-endlich bezüglich μ ist.

Satz 29. *Sei μ ein σ-reguläres Borelmaß auf dem lokalkompakten Raum Ω.*
a) Der Raum $\mathbf{C_c}(\Omega)$ ist dicht in $\mathbf{L^p}(\Omega, \mu)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

b) *Sei $f \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu)$. Dann gibt es eine σ-kompakte*[3] *Menge $L \subset \Omega$ mit $f = 0$ f.ü. auf $\Omega \setminus L$.*

c) *Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt.*

$$\mu(K) := \inf\{\int_\Omega f\,d\mu \mid K \prec f \prec \Omega\}$$

Insbesondere ist ein σ-reguläres Borelmaß auf Ω eindeutig durch seine Wirkung auf $\mathbf{C_c}(\Omega)$ bestimmt.

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ mit $\mu(A) < \infty$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $K \subset A \subset O$ mit K kompakt, O offen und $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$. Mit Urysohn's Lemma findet man $K \prec \varphi \prec O$. Damit gilt

$$\|\mathbf{1}_A - \varphi\|_p \leq \|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_K\|_p + \|\varphi - \mathbf{1}_K\|_p \leq \|\mathbf{1}_O - \mathbf{1}_K\|_p + \|\mathbf{1}_O - \mathbf{1}_K\|_p < 2\varepsilon^{1/p}.$$

Die Behauptung b) ergibt sich aus a) wie folgt. Zunächst findet man eine Folge $(\varphi_n)_n \subset \mathbf{C_c}(\Omega)$ mit $\|\varphi_n \longrightarrow f\|_1 \to 0$. Geht man zu einer Teilfolge über, so kann man $\varphi_n \to f$ f.ü. annehmen und $L := \bigcup_n \operatorname{supp}(\varphi_n)$ definieren.
Teil c) ist ähnlich zu zeigen wie a). □

Wir kommen nun zum wichtigsten Resultat der Maßtheorie auf lokalkompakten Räumen.

Satz 30. (Rieszscher Darstellungssatz)
Sei Ω lokalkompakt und $I : \mathbf{C_c}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ ein positives lineares Funktional. Dann existiert genau ein σ-reguäres Borelmaß μ auf Ω derart, dass

$$I(\varphi) = \int \varphi\,d\mu$$

für alle $\varphi \in \mathbf{C_c}(\Omega)$ gilt. Die Abbildung

$$\left(\mu \longmapsto (f \longmapsto \int_\Omega f\,d\mu)\right) : \mathbf{M}(\Omega) \longrightarrow (\mathbf{C_0}(\Omega))'$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Dabei ist $\mathbf{M}(\Omega)$ der Raum der komplexen Maße μ auf Ω, deren Totalvariation $|\mu|$ regulär ist. (versehen mit der Totalvariationsnorm).

Beweis. Siehe [Rud, 2.14 und 6.19]. Auch [Lan, Chapter IX] ist zu empfehlen. □

Bemerkung: Man kann im Riesz'schen Resultat statt der σ-Regularität des darstellenden Maßes μ alternativ die *innere Regularität* von μ fordern. Dann bleibt der Satz richtig (siehe [Bau, Satz 29.3]). Im allgemeinen können die beiden so gefundenen darstellenden Maße — BAUER nennt sie $\mu_\circ$ (das von innen reguläre) und μ° (das σ-reguläre) — verschieden sein, vgl. [Bau, S. 209 ff]. Allerdings gilt immer $\mu_\circ(K) = \mu^\circ(K)$ für alle kompakten, und damit auch für alle offenen Mengen K (vgl. [Bau, Satz 28.4]). Wegen Teil c) von Satz 29 führen beide Maße dann zu denselben $\mathbf{L^p}$-Räumen. Aus funktionalanalytischer Sicht ist es also egal, mit welchem der beiden Darstellungsmaße man arbeitet.

[3] Eine Menge $L \subset \Omega$ heißt **σ-kompakt**, wenn es kompakte Mengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart gibt dass $\bigcup_n K_n = L$ ist.

Der Riesz'sche Darstellungssatz ist der tiefere Grund, warum die Maßtheorie der Funktionalanalysis so viel zu sagen hat. Man kann auch eine Konstruktion des Lebesguemaßes auf ihn aufbauen: Entweder man wendet den Riesz'schen Satz auf das eindimensionale Riemannintegral für stetige Funktionen an, um das eindimensionale Lebesguemaß zu erhalten, und konstruiert das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^d$ als Produktmaß eindimensionaler Maße (siehe d) von Satz 24). Oder man definiert ein Funktional auf $\mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$ als iteriertes Riemannintegral und wendet dann den Riesz'schen Satz an. (Dies entspricht der Konstruktion eines *Produktfunktionals*.) In [For], [Jos] und [Rud] wird im Prinzip dieser Weg beschritten.

Ergänzend führen wir hier noch ein Resultat an, dass als eine Version des Satzes von der majorisierten Konvergenz angesehen werden kann.

Satz 31. *Sei Ω lokalkompakt und μ ein σ-reguläres Borelmaß auf Ω. Sei weiter $(f_\alpha)_\alpha \subset \mathbf{L^1}(\Omega, \mu)$ ein Netz, das gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine Funktion f konvergiert. Wenn es eine Funktion $g \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mu)$ gibt mit $|f_\alpha| \leq g$ für alle α, dann gilt $\|f_\alpha - f\|_1 \to 0$.*

Beweis. Nach Teil b) von Satz 29, ist $f = 0$ f.ü. außerhalb einer σ-kompakten Menge L. Sei $\varepsilon > 0$. Dann findet man also eine kompakte Menge K derart, dass $\left\|\mathbf{1}_{\Omega\setminus K}\, g\right\|_1 < \varepsilon$. Damit gilt

$$\|f_\alpha - f\|_1 \leq \int_K |f_\alpha - f| \, d\mu + 2 \int_{\Omega\setminus K} g \, d\mu.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir bemerken, dass der Satz über die majorisierte Konvergenz i.A. *nicht* für Netze gilt.

Polnische Räume

Ein topologischer Raum heißt **polnisch**, falls seine Topologie von einer vollständigen Metrik induziert wird, und er **separabel** ist, d.h., eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Wichtige Beispiele polnischer Räume, die nicht schon lokalkompakt sind, bilden die unendlichdimensionalen Banachräume. (Umgekehrt gibt es sogar kompakte, separable Räume, die nicht metrisierbar sind, etwa $\beta\mathbb{N}$, die sog. Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen.) Jeder kompakte, metrische Raum ist polnisch, ebenso wie jede offene Teilmenge eines polnischen Raumes[4]. Inbesondere ist jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ polnisch und lokalkompakt.

Die Wichtigkeit der polnischen Räume ergibt sich aus dem folgenden Regularitätssatz.

Satz 32. *Sei Ω polnisch und μ ein lokal-endliches Borelmaß auf Ω. Dann ist μ regulär und Ω ist σ-endlich bezüglich μ.*

[4]Die normale Metrik auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist nicht vollständig, wenn $F := \mathbb{R}^d \setminus \Omega \neq \emptyset$ ist. In diesem Fall ist aber durch $m(x, y) := |x - y| + |d(x, F) - d(y, F)|$ eine vollständige und äquivalente Metrik auf Ω gegeben.

Beweise finden sich in [Bau, §26] und [Els, Kap. VIII, §1, Satz 1.16]. Man kann sich fragen, ob es auf polnischen Räumen ein Äquivalent zum Riesz'schen Satz gibt. Wir setzen

$$\mathrm{BUC}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist gleichmässig stetig und beschränkt}\}. \tag{6}$$

Der Raum $\mathrm{BUC}(\Omega)$ ist ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm.

Satz 33. *Sei Ω polnisch und sei $I : \mathrm{BUC}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Genau dann gibt es ein (notwendigerweise endliches) Borelmaß μ auf Ω mit*

$$I(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \textit{für alle } f \in \mathrm{BUC}(\Omega)$$

wenn I die sogenannte Straffheitsbedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \subset \Omega \textit{ kompakt} : f \in \mathrm{BUC}(\Omega),\, 0 \le f \le 1 \;\rightarrow\; I(f) < \varepsilon$$

erfüllt. Das Maß μ ist dann eindeutig bestimmt.

Literatur: Grundlegendes über polnische Räume findet sich in [Bau, S.179] und [Que, S.148 ff.]. Der Satz 33 ist eine Spezialisierung von Theorem 2.2. aus [BCR]. Das Chapter 2 des Buches [BCR] behandelt allgemein Radonmaße auf topologischen Hausdorffräumen und kann als Ergänzung zu den hier vorgestellten Sachverhalten, auch den über lokalkompakte Räume, empfohlen werden.

Wir formulieren noch wichtige Konsequenzen für den $\mathbb{R}^d$.

Folgerung 33.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen oder kompakt und sei μ ein lokal-endliches Borelmaß auf Ω (z.B. das Lebesguemaß). Dann gelten folgende Aussagen:*

a) Das Maß μ is regulär.

b) Der Raum $\mathbf{C_c}(\Omega)$ ist dicht in $\mathbf{L^p}(\Omega, \mu)$ für alle $1 \le p < \infty$.

c) Der Raum $\mathbf{L^p}(\Omega, \mu)$ ist separabel für alle $1 \le p < \infty$.

d) Ist auch ν ein lokal-endliches Borelmaß, und gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \, d\nu$$

für alle $f \in \mathbf{C_c}(\Omega)$, so folgt $\mu = \nu$.

Beweis. Teil a) folgt aus Satz 32, Teil b) aus Satz 29 und Teil d) aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 30. Wir zeigen c). Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist der Raum $\mathbf{C}(K)$, versehen mit der Supremumsnorm, separabel. Dies folgt aus dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß (vgl. [Lan, Chap. III, §1]) mithilfe des Satzes von Urysohn aus der Tatsache, dass K metrisch und separabel ist. Damit ist c) bewiesen, falls $\Omega = K$ kompakt ist. Für offenes Ω geht man genauso vor wie in Folgerung 12.1. ◻

§ 13 Das Oberflächenmaß auf der Sphäre

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren

$$B^d(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| < r\}$$
$$S^{d-1}(x_0, r) := \partial B^d(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| = r\}$$

für $r > 0$, wobei $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}$ die **euklidische** Norm auf $\mathbb{R}^d$ bezeichne. Zusätzlich setzen wir $S^{d-1}(x_0, 0) := \{x_0\}$. Falls die Dimension d aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir einfach $S(x_0, r)$ bzw. $B(x_0, r)$. Für $S(0, r)$ bzw. $B(0, r)$ schreiben wir auch einfach $S(r)$ bzw. $B(r)$.

Ein **Oberflächenmaß** auf den euklidischen Sphären ist eine Familie $(\sigma_r)_{r \geq 0}$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) σ_r ist ein positives, endliches Borelmaß auf dem kompakten Raum $S(r)$, für jedes $r \geq 0$.
2) Für $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ ist die Abbildung

$$\left(r \longmapsto \int_{S(r)} f(x)\, d\sigma_r(x) \right) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

stetig.
3) **(Cavalieri'sches Prinzip)** Für $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ und $r_0 > 0$ gilt

$$\int_{B(r_0)} f(x)\, dx = \int_0^{r_0} \int_{S(r)} f(x)\, d\sigma_r(x)\, dr.$$

Bemerkungen:
1. Da die Sphären kompakte, metrische Räume sind, ist jedes Maß σ_r, das 1) erfüllt, automatisch regulär (siehe Satz 32).
2. Die Eigenschaften 1) - 3) bestimmen das Oberflächenmaß eindeutig.
[Ist $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$, so gilt $\int_{S(r_0)} f(x)\, d\sigma_{r_0}(x) = \frac{d}{dr}\big|_{r=r_0} \int_{B(r)} f(x)\, dx$ nach (2) und (3). Hat man aber $g \in \mathbf{C}(S(r_0))$ gegeben, so ist

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{r_0} g(\frac{r_0 x}{|x|}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine Fortsetzung von g zu einer Funktion $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$. Die Regularität des Maßes σ_r impliziert, dass es schon durch seine Wirkung auf stetige Funktionen eindeutig bestimmt ist (vgl. Teil d) von Folgerung 33.1).]

3. Das Cavalieriprinzip impliziert, dass für $r > 0$ die Sphären $S^{d-1}(r)$ alle Nullmengen sind bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes.
[Sei $r > 0$. Dann gilt $\lambda^d(S(r)) = \lambda^d(\{x \mid |x| \leq r\} \setminus \{x \mid |x| < r\}) = \lambda^d\{x \mid |x| \leq r\} - \lambda^d\{x \mid |x| < r\} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B(r+\varepsilon)} \mathbf{1}(x)\, dx - \int_{B(r)} \mathbf{1}(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_r^{r+\varepsilon} \int_{S(r)} \mathbf{1}(x)\, d\sigma_r(x)\, dr = 0.$]

Dies kann man aber auch mithilfe Teil c) von Satz 24 beweisen.
Wir verallgemeinern zunächst das Cavalieriprinzip.

Satz 34. *Sei $(\sigma_r)_{r\geq 0}$ ein Oberflächenmaß. Dann gilt die folgende Verallgemeinerung von 3). Sei $0 \leq r_0 < r_1$ sowie $f \in \mathbf{C}(R(r_0, r_1))$, wobei wir mit $R(r_0, r_1)$ den offenen* Kreisring *$R(r_0, r_1) := \{x \mid r_0 < |x| < r_1\}$ bezeichnen. Dann gilt*

$$\int_{R(r_0,r_1)} |f(x)|\, dx = \int_{r_0}^{r_1} \int_{S(r)} |f(x)|\, d\sigma_r(x)\, dr.$$

Ist dieser Wert endlich, also $f \in \mathbf{L^1}(R(r_0, r_1))$, so ist

$$\int_{R(r_0,r_1)} f(x)\, dx = \int_{0}^{r_0} \int_{S(r)} f(x)\, d\sigma_r(x)\, dr$$

als uneigentliches Riemannintegral.

Beweis. Sei $0 < \varepsilon$ klein. Dann gibt es eine Funktion $g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ mit $f = g$ auf $\overline{R(r_0 + \varepsilon, r_1 - \varepsilon)}$. Jetzt wende man 3) auf g und $B(r_0 + \varepsilon)$ sowie $B(r_1 - \varepsilon)$ an und lasse dann $\varepsilon \searrow 0$ gehen. Dabei beachte man noch, dass die Sphäre $S(r_0)$ eine λ^d-Nullmenge ist (vgl. obige Bemerkung 3). □

Der nächste Satz fasst wichtige Eigenschaften des Oberflächenmaßes zusammen.

Satz 35. *Sei $(\sigma_r)_{r>0}$ ein Oberflächenmaß auf euklidischen Sphären auf dem $\mathbb{R}^d$. Sei weiter $r_0 > 0$ und $f \in \mathbf{C}(S(r_0))$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) $$\int_{S(r_0)} f(x)\, d\sigma_{r_0}(x) = r_0^{d-1} \int_{S(1)} f(r_0 x)\, d\sigma_1(x).$$

b) $$\int_{S(r_0)} f(Tx)\, d\sigma_{r_0}(x) = \int_{S(r_0)} f(x)\, d\sigma_{r_0}(x)$$

für alle orthogonalen, linearen Abbildungen $T \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^d)$.

c) $$\int_{S(r_0)} f(x)\, d\sigma_{r_0}(x) = \frac{d}{r_0} \int_{\dot{B}(r_0)} f\left(\frac{r_0 x}{|x|}\right) dx$$

wobei $\dot{B}(r_0) := B(r_0) \setminus \{0\}$ ist.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \int_{r_0}^{r_0+\varepsilon} \int_{S(r)} f(x)\, d\sigma_r(x) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{B(r_0+\varepsilon)} f\, dx - \int_{B(r_0)} f(x)\, dx\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{r_0 \leq |x| < r_0+\varepsilon\}} f(x)\, dx = \frac{r_0^d}{\varepsilon} \int_{\{1 \leq |x| < 1+\varepsilon/r_0\}} f(r_0 x)\, dx \\
&= r_0^{d-1} \frac{r_0}{\varepsilon} \int_{1}^{1+\varepsilon/r_0} \int_{S(r)} f(r_0 x)\, d\sigma_r(x) \to r_0^{d-1} \int_{S(1)} f(r_0 x)\, d\sigma_1(x)
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \searrow 0$. Dies zeigt a). Ist $T \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\int_{S(r_0)} f \circ T\, d\sigma_{r_0} = \frac{d}{dr}\bigg|_{r=r_0} \int_{B(r)} f(Tx)\, dx \overset{!}{=} \frac{d}{dr}\bigg|_{r=r_0} \int_{B(r)} f(x)\, dx = \int_{S(r_0)} f\, d\sigma_{r_0}$$

Um c) zu beweisen, benutzen wir Satz 34 und rechnen

$$\frac{d}{r_0}\int_{\dot{B}(r_0)} f(r_0x/|x|)\,dx = \frac{d}{r_0}\int_0^{r_0}\int_{S(r)} f(r_0x/|x|)\,d\sigma_r(x)\,dr$$
$$\overset{a)}{=} \frac{d}{r_0}\int_0^{r_0}\int_{S(1)} f(r_0x/|x|)\,d\sigma_1(x) r^{d-1}\,dr = \int_{S(1)} f(r_0x/|x|)\,d\sigma_1(x)\,\frac{d}{r_0}\int_0^{r_0} dr^{d-1}\,dr$$
$$= r_0^{d-1}\int_{S(1)} f(r_0x/|x|)\,d\sigma_1(x) \overset{a)}{=} \int_{S(r_0)} f(x)\,d\sigma_{r_0}(x)$$

□

Wir setzen $A_d(r) := \sigma_r(S^{d-1}(0,r))$, d.h., $A_d(r)$ bezeichne den Flächeninhalt der (euklidischen) r-Sphäre im $\mathbb{R}^d$. Weiter sei

$$\omega_d := \lambda^d(B^d(0,1)) := \int_{B^d(0,1)} \mathbf{1}(x)\,dx$$

das Volumen der d-dimensionalen euklidischen Einheitskugel.

Folgerung 35.1. *Es gilt $A_d(r) = dr^{d-1}\omega_d$.*

Wir schreiten nun zur *Konstruktion* des Oberflächenmaßes. Im Hinblick auf den Riesz'schen Darstellungssatz reicht es, statt des Maßes σ_r ein *positives Funktional* auf $\mathbf{C}(S(r))$ zu konstruieren. Natürlich könnten wir Teil c) von Satz 35 als Ausgangspunkt nehmen. Es erweist sich aber als günstig, einen anderen Weg zu beschreiten. Beachte, dass $\mathbb{S}_r^0 = \{r, -r\}$ ist.

Wir definieren rekursiv (in Abhängigkeit von der Dimension d):

$$\int_{S^0(r)} f(x)\,d\sigma_r(x) := f(-r) + f(r) \qquad \text{für } f \in \mathbf{C}(S^0(r))$$

im Fall $d = 1$ und

$$\int_{S^{d-1}(r)} f(x)\,d\sigma_r(x) := \int_{B^{d-1}(r)} \frac{r}{\sqrt{r^2-|y|^2}}\left[f\left(\sqrt{r^2-|y|^2}, y\right) + f\left(-\sqrt{r^2-|y|^2}, y\right)\right]dy \tag{7}$$

für $f \in \mathbf{C}(S^{d-1}(r))$, falls $d \geq 2$. Damit ist klar, dass für $d = 1$ ein Oberflächenmaß auf euklidischen Sphären definiert ist. Um zu zeigen, dass dies auch für $d \geq 2$ der Fall ist, gehen wir induktiv vor und nehmen i. F. an, dass für $d-1$ schon ein Oberfächenmaß konstruiert sei.
Zunächst ist zu bemerken, dass dann die gegebene Definition von $\int_{S^{d-1}(r)} f(x)\,d\sigma_r(x)$ jedenfalls sinnvoll ist.

[Klar ist, dass für festes $r > 0$ und $f \in \mathbf{C}(S^{d-1}(r))$ die Funktion

$$h := \left(y \longmapsto \frac{r}{\sqrt{r^2-|y|^2}}\left[f\left(\sqrt{r^2-|y|^2}, y\right) + f\left(-\sqrt{r^2-|y|^2}, y\right)\right]\right) : B^{d-1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

stetig ist. Um ihre Integrierbarkeit zu beweisen, benutzen wir Satz 34 (mit $r_0 := 0$ und $r_1 := r$) und a) aus Satz 35. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{B^{d-1}(r)} &\frac{r}{\sqrt{r^2-|y|^2}}\left|f\left(\sqrt{r^2-|y|^2},y\right)+f\left(-\sqrt{r^2-|y|^2},y\right)\right|dy\\&=\int_0^r \frac{rs^{d-2}}{\sqrt{r^2-s^2}}\int_{S^{d-2}(1)}\left|f\left(\sqrt{r^2-s^2},sy\right)+f\left(-\sqrt{r^2-s^2},sy\right)\right|d\sigma_1(y)\,ds.\end{aligned}$$

Die Funktion innerhalb der Betragsstriche ist stetig in $(s,y) \in [0,r]\times S^{d-2}(1)$. Integriert man die y-Variable aus, so erhält man eine stetige Funktion in $s \in [0,r]$. Da der Vorfaktor $rs^{d-2}/\sqrt{r^2-s^2}$ integrierbar ist auf $[0,r)$, folgt die Integrierbarkeit von h.]

Wir haben also ein positives Funktional auf $\mathbf{C}(S^{d-1}(r))$ definiert. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (Satz 30) wird dieses Funktional dann von einem (regulären, endlichen) Borelmaß induziert. Wenden wir uns nun der Eigenschaft 2) eines Oberflächenmaßes zu.

[Sei $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$. Setze

$$F(r,s,x) := f(\sqrt{|r^2-s^2|},sx)+f(-\sqrt{|r^2-s^2|},sx).$$

für $(r,s,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ (stetig!) und $G(r,s) := \int_{S^{d-2}(1)} F(r,s,x)\,d\sigma_1(x)$. Wie oben sieht man

$$\int_{S(r)} f(x)\,d\sigma_r(x) = \int_0^r \frac{rs^{d-2}}{\sqrt{r^2-s^2}}G(r,s)\,ds = r^{d-1}\int_0^1 \frac{s^{d-2}}{\sqrt{1-s^2}}G(r,rs)\,ds.$$

und das ist stetig in $r\in[0,\infty)$ nach Folgerung 8.1. (Beachte $d\geq 2$.)]

Es bleibt, die Eigenschaft 3) eines Oberflächenmaßes zu zeigen.

[Sei $f\in\mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon>0$. Wir schreiben $r_\varepsilon := r+\varepsilon$ und betrachten die Funktion

$$H_\varepsilon(r) := \int_{B^{d-1}(r)}\int_{-\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}}^{\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}} f(t,x)\,dt\,dx = \int_{B^{d-1}(r)}\int_0^{\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}} f(t,x)+f(-t,x)\,dt\,dx.$$

Dann gilt jedenfalls $\lim_{\varepsilon\searrow 0} H_\varepsilon(r) = \int_{B^{d-1}(r)}\int_{-\sqrt{r^2-|x|^2}}^{\sqrt{r^2-|x|^2}} f(t,x)\,dt\,dx = \int_{B^d(r)} f(y)\,dy$ mithilfe des Satzes von Fubini. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}H_\varepsilon(r) &= \int_{S^{d-2}(r)}\int_0^{\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}} f(t,x)+f(-t,x)\,dt\,d\sigma_r(x)\\&\quad+\int_{B^{d-1}(r)}\left(f(\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2},x)+f(-\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2},x)\right)\frac{r_\varepsilon}{\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}}\,dx.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die (Induktions-)hypothese verwendet, dass auf den $(d-2)$-dimensionalen Sphären bereits ein Oberflächenmaß konstruiert ist. Nun gilt

$$\int_{S^{d-2}(r)}\int_0^{\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}} f(t,x)+f(-t,x)\,dt\,d\sigma_r(x)\to 0$$

für $\varepsilon\searrow 0$, gleichmäßig in r aus beschränkten Teilmengen von $(0,\infty)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}&\int_{B^{d-1}(r)}\left(f(\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2},x)+f(-\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2},x)\right)\frac{r_\varepsilon}{\sqrt{r_\varepsilon^2-|x|^2}}\,dx\\ \to\ &\int_{B^{d-1}(r)}\left(f(\sqrt{r^2-|x|^2},x)+f(-\sqrt{r^2-|x|^2},x)\right)\frac{r}{\sqrt{r^2-|x|^2}}\,dx = \int_{S^{d-1}(r)} f(y)\,d\sigma_r(y)\end{aligned}$$

für $\varepsilon\searrow 0$, gleichmäßig in r aus kompakten Teilmengen von $(0,\infty)$.

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{d}{dr}\int_{B(r)} f(y)\,dy = \int_{S^{d-1}(r)} f(y)\,d\sigma_r(y)$$

auf $(0,\infty)$ und daraus dann die Eigenschaft 3). (Um die letzte Konvergenzaussage zu zeigen, ist es wiederum hilfreich, das Cavalieriprinzip anzuwenden, also die Induktionshypothese ins Spiel zu bringen.)]

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 36. *Es gibt genau ein Oberflächenmaß auf euklidischen Sphären des $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$).*

Folgerung 36.1. *Es gilt*

$$\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\,\Gamma(\frac{d}{2})} \qquad \textit{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2}\,dx = 1$$

für alle $d \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\omega_2 = \pi$.

Beweis. Wir haben $\omega_2 = \int_{B^2(1)} \mathbf{1}\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{1}(s,t)\,ds\,dt = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt \overset{t=\cos s}{=} 2\int_{\pi}^{0}\sin s(-\sin s)\,ds = 2\int_0^{\pi}\sin^2 s\,ds = \cdots = \pi$. Setze $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2}\,dx$. Dann ist

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi|x|^2}\,dx = \int_0^{\infty} r\int_{S^1(r)} e^{-\pi r^2}\,d\sigma_r(x)\,dr = \int_0^{\infty} re^{-\pi r^2}\,2\omega_2 = -e^{-\pi r^2}\Big|_o^{\infty} = 1.$$

Daraus folgt $I = 1$ und somit auch $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2}\,dx = I^d = 1$. Damit gilt wie im Fall $d = 2$:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2}\,dx = \int_0^{\infty} r^{d-1}e^{-\pi r^2}\,d\omega_d\,dr \overset{s=\pi r^2}{=} \frac{d\omega_d}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-s}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{\frac{d-2}{d}}\,ds = \frac{d\omega_d}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\Gamma(\frac{d}{2}).$$

□

Als letztes können wir nun den **Divergenzsatz für Sphären** beweisen.

Satz 37. (Divergenzsatz)
Seien $d \in \mathbb{N}$ und $r_0 > 0$. Ist $F : \overline{B^d(0,r)} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld mit $F \in \mathbf{C^1}(B^d(0,r),\mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\int_{B^d(r_0)} \operatorname{div} F(x)\,dx = \frac{1}{r_0}\int_{S^{d-1}(r_0)} \langle F(x), x\rangle\ d\sigma_{r_0}(x)$$

Beweis. Man kann o.B.d.A $r_0 = 1$ annehmen. Ein Approximationsargument zeigt außerdem, dass man sich auf $F \in \mathbf{C^1}(B(r),\mathbb{R}^d)$ für $r > 1$ zurückziehen kann. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{S(1)} \langle F(x), x\rangle\ d\sigma_{r_1}(x) = \sum_j \int_{S(1)} F_j(x)x_j d\sigma_{r_1}(x)\\
&= \sum_j \int_{B^{d-1}(1)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} \Big(F_j(y_1,\dots,y_{j-1},\sqrt{1-|y|^2},y_{j+1},\dots,y_{d-1})\sqrt{1-|y|^2} -\\
&\qquad\qquad F_j(y_1,\dots,y_{j-1},-\sqrt{1-|y|^2},y_{j+1},\dots,y_{d-1})\sqrt{1-|y|^2}\Big)\ dy\\
&= \sum_j \int_{B^{d-1}(1)} \Big(F_j(y_1,\dots,y_{j-1},\sqrt{1-|y|^2},y_{j+1},\dots,y_{d-1})\ -\\
&\qquad\qquad F_j(y_1,\dots,y_{j-1},-\sqrt{1-|y|^2},y_{j+1},\dots,y_{d-1})\Big)\ dy\\
&= \sum_j \int_{B^{d-1}(1)} \int_{-\sqrt{1-|y|^2}}^{\sqrt{1-|y|^2}} \partial_j F_j(y_1,\dots,y_{j-1},t,y_{j+1},\dots,y_{d-1})\,dt\,dy\\
&= \sum_j \int_{B^d(1)} \partial_j F_j(x)\,dx = \int_{B^d(1)} \operatorname{div} F(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass ein Oberflächenmaß eindeutig ist und somit die in der Konstruktion (7) ausgezeichnete Variable beliebig gewählt werden kann. □

Literatur: Die Einführung des Oberflächenmaßes stützt sich auf [Kra]. Dort wird gezeigt, wie die elementare **Potentialtheorie** aus den hier bewiesenen Resultaten über das Oberflächenmaß auf Sphären entwickelt werden kann.
Der Divergenzsatz heißt auch **Gauß'scher Integralsatz** und gilt in viel allgemeinerer Form. Dazu muß allerdings die Theorie der **Integration auf Untermannigfaltigkeiten** des $\mathbb{R}^d$ bekannt sein. Eine lesbare Fassung findet sich in [Koe, Kapitel 9 und 10].

Literatur

[Bar] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, J. Wiley & Sons, Inc., 1995.

[Bau] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin Heidelberg 1990.

[BCR] C. Berg, J.P.R. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, GTM 100, Springer-Verlag, New York 1984.

[Bro] Th. Bröcker, *Analysis II*, BI-Verlag, Mannheim 1992.

[Els] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1999.

[For] O. Forster, *Analysis III*, Vieweg, Wiesbaden

[Jos] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[Koe] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[Kra] W. Kratz, *Elementare Potentialtheorie*, Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differenzialgleichungen, Heft 4, Universität Ulm 1999.

[Lan] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, GTM 142, Springer-Verlag, New York 1993.

[Que] B. v.Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1979.

[Rud] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3. Auflage, McGraw Hill, Singapore 1987.

[Wer] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1997.