Werner Kratz
Katja Setzer

Sommersemester 2007
24.04.2007
Blatt 1

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Abgabe und Besprechung: Dienstag, den 08.05.2007)

1.* *Orthogonale Trajektorien*

(a) Skizziere die Kurvenschar $y(x,c) = \dfrac{c}{x}$, $x \neq 0$ mit Scharparameter $c \in \mathbb{R}$.

(b) Stelle für die Kurvenschar aus (a) eine Differentialgleichung auf.

(c) Bestimme die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar aus (a) und skizziere diese ebenfalls.
Wie nennt man diese Kurven?

(5 Punkte)

2. *Integralgleichung*

Eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion y erfüllt die Gleichung

$$y(x) \;=\; \int_0^x t\,y(t)\,dt + x^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Berechne $y(x)$.
Hinweis : Leite zunächst ein Anfangswertproblem für y her. (5 Punkte)

3. Berechne Stammfunktionen für die folgenden Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsbereich:

(a) $\tan x$.

(b) $\dfrac{\sin(2x)}{\cos x}$.

(c) $e^x \cos x$.

(d) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(e) $2x \arctan x$.

(10 Punkte)

4. Berechne die Lösungsgesamtheit folgender Differentialgleichungen:

   (a) $y' = -y \cdot \tan x + \sin(2x)$.

   (b) $y' = -\dfrac{y}{x} + 2 \arctan x$.

(3 Punkte)

5. Löse die folgenden Anfangswertprobleme und gib ein möglichst großes Lösungsintervall an:

   (a) $y' = -y \cdot \tan x + \sin(2x)$, $y(\pi) = -1$.

   (b) $y' = 2x\,(1 + y^2)$, $y(0) = 0$.

   (c) $y' = y\, e^x \cos x$, $y\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

   (d) $xy' + y = 2x \arctan x$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

(4 Punkte)