Werner Kratz
Katja Setzer

Sommersemester 2007
08.05.2007
Blatt 2

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Abgabe und Besprechung: Dienstag, den 15.05.2007)

6. Löse die folgenden Anfangswertprobleme mit Angabe eines möglichst großen Lösungsintervalles:

   (a) $y' = y + xy^2 \;,\; y(0) = 1 \;.$

   (b) $y' = \dfrac{y}{2x} + 5\,x^2y^5 \;,\; y(1) = 1 \;.$

   (c) $y'y = \dfrac{2x}{1+x^2} \;,\; y(0) = 1 \;.$

   (d) $y' = y + x \;,\; y(0) = 0 \;.$

   (8 Punkte)

7. *Differentialungleichung*

   Es sei y einmal stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$, und es gelte $y'(x) \le y(x) + x$ für alle $x \in [0, \infty)$ und $y(0) = 0$.
   Zeige: Dann gilt $y(x) \le e^x - 1 - x$ für alle $x \in [0, \infty)$.
   Hinweis: Betrachte die Funktion $z(x) := e^{-x}y(x)$ und zeige $z'(x) \le x\,e^{-x}$ auf $[0, \infty)$.

   (6 Punkte)

8.* *Die homogene Differentialgleichung*

   (a) Dies ist die Differentialgleichung $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x > 0$, mit einer stetigen Funktion $g(.)$. Leite mit Hilfe der Substitution $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ eine neue Differentialgleichung für z her.

   (b) Löse das folgende Anfangswertproblem:

   $$y' = \frac{y^2 + x^2}{yx}, \quad y(e) = e\sqrt{2} \;.$$

   (6 Punkte)