

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Abgabe und Besprechung: Dienstag, den 22.05.2007)

9.* Die $\tan \frac{x}{2}$ -Substitution

- (a) Zur Berechnung einer Stammfunktion von $\mathcal{R}(\cos x, \sin x)$ bei gegebener Funktion $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$ benutzt man die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$.

Zeige, dass dabei gilt: $x = 2 \arctan t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, also

$$\int \mathcal{R}(\cos x, \sin x) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \Big|_{t=\tan \frac{x}{2}}.$$

- (b) Berechne eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{4}{4 \cos x + 3 \sin x}$ auf ihrem natürlichen Definitionsbereich.

(7 Punkte)

10. Löse die folgenden Anfangswertprobleme mit Angabe eines möglichst großen Lösungsintervalles:

(a) $y' = \frac{4y}{4 \cos x + 3 \sin x}$, $y(0) = 4^{-4/5}$.

(b) $y' = \frac{y}{x(a-bx)}$, mit $a, b > 0$ und $y\left(\frac{a}{b+1}\right) = 1$.

(c) $y' = y(a-by)$, $y(0) = 1$.

(9 Punkte)

11. Die logistische Differentialgleichung

Es sei $p(t)$ die Population einer Art zum Zeitpunkt t . Nach dem Populationsmodell von Verhulst (1843) gilt dann mit gewissen Konstanten $a > 0$, $b > 0$ ("vital coefficients of life") die sogenannte logistische Gleichung

$$p'(t) = ap(t) - bp^2(t).$$

Berechne die Population $p(t)$ für $t \geq 0$ mit Anfangspopulation $p(0) = p_0 > 0$, und berechne, im Falle der Existenz, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ (sog. "Gleichgewicht").

(6 Punkte)