Werner Kratz
Katja Setzer

Sommersemester 2007
15.05.2007
Blatt 3

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Abgabe und Besprechung: Dienstag, den 22.05.2007)

9.* *Die* $\tan\frac{x}{2}$ *-Substitution*

(a) Zur Berechnung einer Stammfunktion von $\mathcal{R}(\cos x, \sin x)$ bei gegebener Funktion $\mathcal{R}(\cdot,\cdot)$ benutzt man die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$.

Zeige, dass dabei gilt : $x = 2\arctan t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $d\,x = \frac{2}{1+t^2}d\,t$, also

$$\int \mathcal{R}\left(\cos x, \sin x\right) d\,x \;=\; \int \mathcal{R}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} d\,t\,\bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}} .$$

(b) Berechne eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{4}{4\cos x + 3\sin x}$ auf ihrem natürlichen Definitionsbereich.

(7 Punkte)

10. Löse die folgenden Anfangswertprobleme mit Angabe eines möglichst großen Lösungsintervalles:

(a) $y' = \frac{4y}{4\cos x + 3\sin x}$, $y(0) = 4^{-4/5}$.

(b) $y' = \frac{y}{x(a-bx)}$, mit $a, b > 0$ und $y\left(\frac{a}{b+1}\right) = 1$.

(c) $y' = y(a - by)$, $y(0) = 1$.

(9 Punkte)

11. *Die logistische Differentialgleichung*

Es sei $p(t)$ die Population einer Art zum Zeitpunkt t . Nach dem Populationsmodell von Verhulst (1843) gilt dann mit gewissen Konstanten $a > 0$, $b > 0$ (" vital coefficients of life") die sogenannte logistische Gleichung

$$p'(t) \;=\; a\,p(t) - b\,p^2(t) .$$

Berechne die Population $p(t)$ für $t \geq 0$ mit Anfangspopulation $p(0) = p_0 > 0$, und berechne, im Falle der Existenz, $\lim_{t\to\infty} p(t)$ (sog. "Gleichgewicht").

(6 Punkte)