Werner Kratz
Katja Setzer

Sommersemester 2007
22.05.2007
Blatt 4

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Abgabe und Besprechung: Dienstag, den 05.06.2007)

12.* *Die Clairotsche Differentialgleichung*

Gegeben sei die Clairotsche Differentialgleichung $y = x\,y' - \frac{1}{2}y'^2$.

(a) Berechne die linearen Lösungen.
(b) Berechne die singuläre Lösung.
(c) Skizziere die linearen Lösungen mit der singulären Lösung als Hüllkurve.

(6 Punkte)

13. *Schwingungsgleichungen*

Löse die folgenden Anfangswertprobleme und zeichne den Graphen der Lösung:

(a) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
(c) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(9 Punkte)

14. *Die Riccatische Differentialgleichung*

Dies ist die Differentialgleichung

$$(*) \;\; y' \;=\; f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \;\text{ mit }\; f, g, h \in C(I) \;.$$

(a) Es seien $y_0(x)$ eine Lösung von $(*)$ auf I und $z(x)$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$z' \;=\; -(2f(x)y_0(x) + g(x))z - f(x) \quad \text{mit } \; z(x) \neq 0 \; \text{ auf } \; I.$$

Zeige: $y(x) := y_0(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ ist eine Lösung von $(*)$ auf I .

(b) Es seien $f \in C_1(I)$ mit $f(x) \neq 0$ auf I und $u(x)$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung 2.ter Ordnung

$$u'' \;=\; \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + g(x)\right) u' - f(x)h(x)\,u \;\text{ mit }\; u(x) \neq 0 \;\text{ auf }\; I \;.$$

Zeige: $y(x) = -\dfrac{u'(x)}{f(x)u(x)}$ ist eine Lösung von $(*)$ auf I .

(8 Punkte)