

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Abgabe und Besprechung: Dienstag, den 03.07.2007)

18. *Randwertproblem*

Gegeben sei das folgende "Randwertproblem" mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

$$(\text{RWP}) \quad y'' + ay = 0 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1 .$$

- (a) Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Randwertproblem (RWP) keine Lösung?
- (b) Berechne im Falle der Lösbarkeit des Randwertproblems (RWP) alle Lösungen.

(6 Punkte)

19. Schreibe folgende Differentialgleichungen und Systeme von Differentialgleichungen jeweils als ein System 1. Ordnung.

- (a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = x^2$.
- (b) $\dot{x}_1 = x_2 x_1^2 - \sin(x_1 + x_2)$
 $\ddot{x}_2 = \dot{x}_2^2 + \dot{x}_2 + x_1 - \pi$.
- (c) $y_1'' = 3y_1' - 4y_1 + xy_2 + \sin x$
 $y_2'' = y_2' + x^2 y_2 - y_1' + xy_1 - \cos x$.

(3 Punkte)

20. Berechne zwei linear unabhängige Lösungen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ für

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{y_1}{x(x^2+1)} + \frac{y_2}{x^2(x^2+1)} , \\ y_2' &= -\frac{x^2}{x^2+1} y_1 + \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} y_2 , \quad x > 0 . \end{aligned}$$

Hinweis:

Verwende die Ansätze $y_1 = \frac{y_2}{x}$ und $y_1 = \frac{-y_2}{x^3}$.

(6 Punkte)

21.* Gegeben sei das lineare homogene System $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Zeige, dass $y = e^{\lambda x} s$ eine Lösung des gegebenen linearen Systems ist.

(5 Punkte)