

Übungen zu Differentialgleichungen für Lehramtskandidaten

(Besprechung: Dienstag, den 10.07.2007)

22. Diagonalisiere, falls möglich die folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

23. Berechne eine Fundamentalmatrix für die folgenden linearen homogenen Systeme

(a)

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} y.$$

(b)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} y.$$

24. Betrachte die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 4 - 2x - 2x^2.$$

(a) Berechne drei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung.

Hinweis : Verwende den Ansatz $y = e^{\lambda x}$.

(b) Berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz

$$y = c_2 x^2 + c_1 x + c_0.$$

(c) Bestimme eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad \text{und} \quad y''(0) = 3.$$

25.*

Gegeben sei die matrixwertige Funktion $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^x \\ -e^{-x} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Definiere $B(x) := A'(x)$ und beachte, dass die so definierte matrixwertige Funktion B komponentenweise auch gleichzeitig eine Stammfunktion von A ist.

Zeige:

- (a) $B^2(x) = I$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $e^{B(x)} = \cosh(1) \cdot I + \sinh(1) \cdot B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $B(x)A(x) \neq A(x)B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $\frac{d}{dx}e^{B(x)} \neq B'(x)e^{B(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

26. Es sei $A(x)$ wie in Aufgabe 25. Berechne eine Fundamentalmatrix von $y' = A(x)y$.

Hinweis:

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ löst $y' = A(x)y$ genau dann, wenn gilt:

$$y_2 = e^{-x}y_1' \quad \text{und} \quad y_1'' - y_1' + y_1 = 0.$$