Analysis I - Erste Klausur

Wintersemester 2004-2005

Matrikelnummer: ______________________________

Vorname: ______________________________

Name: ______________________________

Aufgabe	1	
Aufgabe	2	
Aufgabe	3	
Aufgabe	4	
Aufgabe	5	
Aufgabe	6	
Aufgabe	7	
Aufgabe	8	
Aufgabe	9	
Aufgabe	10	
Summe		

Matrikelnummer: ___________ Name: __________________ Vorname: _________________

Aufgabe 1 8 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für beliebige Mengen $A, B \subseteq U$ gilt

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad B' \subseteq A'$$

für die Komplemente $A' = U \backslash A$ und $B' = U \backslash B$.

(b) Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, in der zusätzlich $a \circ a = e$ für alle $a \in G$ gilt, so ist G kommutativ (A4).

Lösung

a) $\Rightarrow$:
Es gelte $A \subseteq B$, also $\forall x \in A: \ x \in B$. Sei nun $x \in B'$ beliebig, also $x \notin B$. Dann ist $x \notin A$, sonst wäre wegen $A \subseteq B$ auch $x \in B$. Also $B' \subseteq A'$.

a) $\Leftarrow$:
Es gelte $B' \subseteq A'$, also $\forall x \notin B: \ x \notin A$. Sei nun $x \in A$ beliebig. Wäre x kein Element von B, so wäre $x \in B' \Rightarrow x \in A'$ im Widerspruch zu $x \in A$, also liegt x in B, d. h. $A \subseteq B$.

b)
Ist $g \in G$ beliebig, so ist g sein eigenes Inverses wegen $g \circ g = e$ nach Voraussetzung, d. h. $g^{-1} = g$ für alle g. Es gilt $g \circ g = e$ für alle g, also auch für $g = a \circ b$, es folgt

$$e \;=\; g \circ g \;=\; (a \circ b) \circ (a \circ b) \underset{\text{A1}}{=} a \circ b \circ a \circ b\,.$$

Daraus folgt nach Multiplikation mit b^{-1} von links $e \circ b^{-1} = a \circ b \circ a \circ b \circ b^{-1}$. Weiteres Umformen ergibt

$$e \circ b^{-1} \;=\; a \circ b \circ a \circ b \circ b^{-1} \underset{\text{A2/A3}}{\Rightarrow} b^{-1} \;=\; a \circ b \circ a \underset{\substack{\cdot a^{-1} \\ \text{rechts}}}{\Rightarrow} b^{-1} \circ a^{-1} \;=\; a \circ b \circ a \circ a^{-1}$$

$$\underset{\text{A2/A3}}{\Rightarrow} b^{-1} \circ a^{-1} \;=\; a \circ b \underset{\substack{a \text{ und } b \text{ sind} \\ \text{selbstinvers}}}{\Rightarrow} b \circ a \;=\; a \circ b\,.$$

Da $a, b \in G$ hier völlig beliebig waren, ist die Gruppe kommutativ (d. h. es gilt A4).

Analysis I - Erste Klausur 18.12.2004

Matrikelnummer: ___________ Name: _________________ Vorname: ________________

Aufgabe 2 8 Punkte

Es sei $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellen Abbildungen und $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig. Prüfen Sie, ob

$$\text{a)} \quad f \sim_\xi g \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi) = g(\xi)$$

$$\text{b)} \quad f \sim_A g \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = \lambda + g(x)$$

$$\text{c)} \quad f \sim_B g \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R}:\ f(y) = g(y)$$

jeweils Äquivalenzrelationen auf F sind (mit Beweis).

Lösung

a)
Reflexiv: für $f \in F$ ist $f(\xi) = f(\xi)$, also $f \sim_\xi f$.

Symmetrisch: gilt $f \sim_\xi g$, so ist $f(\xi) = g(\xi)$, also auch $g(\xi) = f(\xi)$, und damit $g \sim_\xi f$.

Transitiv: es sei $f \sim_\xi g$ und $g \sim_\xi h$, also $f(\xi) = g(\xi)$ und $g(\xi) = h(\xi)$. Dann folgt aus $f(\xi) = g(\xi) = h(\xi)$ wegen der Transitivität von $=$ auch $f(\xi) = h(\xi)$ und damit $f \sim_\xi h$.

$\Rightarrow$ $\sim_\xi$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation auf F.

b)
Reflexiv: für jedes $f \in F$ gilt mit $\lambda = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x) + \lambda$, also $f \sim_A f$.

Symmetrisch: ist $f \sim_A g$, also $f(x) = g(x) + \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $g(x) = f(x) + \mu$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\mu = -\lambda \in \mathbb{R}$ wegen A3. Also $g \sim_A f$.

Transitiv: es sei $f \sim_A g$ und $g \sim_A h$ mit $f(x) = g(x) + \lambda$ bzw. $g(x) = h(x) + \mu$ für $f, g, h \in F$, gewisse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = g(x) + \lambda = (h(x) + \mu) + \lambda = h(x) + (\lambda + \mu)$ wegen A1 mit $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$. Also ist auch $f \sim_A h$.

$\Rightarrow$ $\sim_A$ ist eine Äquivalenzrelation auf F.

c)
Die Relation $\sim_B$ ist keine Äquivalenzrelation auf F, denn sie ist **nicht transitiv**. Ein Gegenbeispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x \neq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 2 & \text{falls} \quad x \neq 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls} \quad x = 0 \\ 2 & \text{falls} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

wegen $f \sim_B g$ (mit $y = 0$) und $g \sim_B h$ (mit $y = 1$) aber $f \not\sim_B h$.

Matrikelnummer: __________ Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 3 8 Punkte

Bestimmen Sie (falls existent) Infimum/Supremum/Minimum/Maximum der folgenden Menge:

$$M = \{(-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^k \frac{1}{k} \mid n, k \in \mathbb{N}\} .$$

Lösung

Minimum:
Das Minimum von M ist -2: für $n = 1$ und $k = 1$ liegt das Element $-\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = -2$ in M. Wegen $(-1)^n \frac{1}{n} \geq -1$ für alle n und $(-1)^k \frac{1}{k} \geq -1$ für alle k ist jedes weitere Element von M nicht kleiner als -2. Damit ist -2 das Minimum.

Infimum:
Aus $\min(M) = -2$ folgt $\inf(M) = -2$, da ein Minimum nach Definition eine untere Schranke ist, und keine größere untere Schranke existieren kann wegen $-2 \in M$.

Maximum:
Das Maximum von M ist 1. Für $n = 2$ und $k = 2$ liegt $1 = (-1)^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ in M. Für $n \geq 2$ ist der Betrag von $(-1)^n \frac{1}{n}$ nicht größer als $\frac{1}{2}$, und für $n = 1$ ist $(-1)^n \frac{1}{n} = -1$ auch nicht größer als $\frac{1}{2}$. Damit folgt, dass $(-1)^n \frac{1}{n}$ für kein $n \in \mathbb{N}$ größer als $\frac{1}{2}$ ist. Ebenso für $(-1)^k \frac{1}{k}$. Damit ist $(-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^k \frac{1}{k}$ nicht größer als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Also ist 1 tatsächlich das Maximum.

Supremum:
Aus $\max(M) = 1$ folgt $\sup(M) = 1$, da ein Maximum nach Definition eine obere Schranke ist, und keine kleinere obere Schranke existieren kann wegen $1 \in M$.

Matrikelnummer: __________ Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 4 8 Punkte

Entscheiden Sie, ob diese Folgen konvergieren, und berechnen Sie falls existent den Grenzwert:

$$a_n \;=\; \frac{(n+1)(2n^2+3)}{4n-7n^3} \quad , \quad b_n \;=\; (-2)^n \frac{n}{2n+1} \;.$$

Lösung

Die Folge (a_n) wird umgeformt zu

$$a_n \;=\; \frac{(n+1)(2n^2+3)}{4n-7n^3} \;=\; \frac{2n^3+2n^2+3n+3}{-7n^3+4n} \;\underset{:n^3}{=}\; \frac{2+2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}+3\frac{1}{n^3}}{-7+4\frac{1}{n^2}} \;.$$

Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, wegen $0 \leq \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k}$ aber auch alle anderen Summanden bis auf -7 im Nenner und 2 im Zähler. Nach dem Summensatz und dem Quotientensatz konvergiert die Folge (a_n) gegen $-\frac{2}{7}$.

Angenommen (b_n) konvergiert. Sie enthält die Teilfolge (b_{2n}) mit

$$b_{2n} \;=\; (-2)^{2n}\frac{2n}{4n+1} \;=\; \left((-2)^2\right)^n \frac{2n}{4n+1} \;=\; 4^n\frac{2n}{4n+1} \;=\; \frac{1}{2}4^n\frac{n}{2n+\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{2}4^n\frac{1}{2+\frac{1}{2n}} \;.$$

Nach Satz 2.2.2 konvergiert dann auch (b_{2n}). Da nach dem Summen-/Quotientensatz die Folge $c_{2n} = \frac{1}{2+\frac{1}{2n}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert, kann das Folgenglied (b_{2n}) jeweils mit c_{2n}^{-1} multipliziert werden, nach dem Produktsatz konvergiert dann auch $b_{2n} \cdot c_{2n}^{-1} = \frac{1}{2}4^n$. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt aber $4^n = (1+3)^n \geq 1+3n$, und diese Folge divergiert (gegen ∞), da $1+3n$ mit n beliebig groß wird. Also war die Annahme falsch, und (b_n) ist divergent.

Matrikelnummer: ____________ Name: ____________________ Vorname: ___________________

Aufgabe 5 9 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4 :\ 2^n \ \geq\ n^2 \quad , \quad \text{b) } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 :\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ = \ 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Lösung

a)
Induktion über n für $n \geq 4$:
IA: Für $n = 4$ gilt $2^4 = 16$ und $4^2 = 16$, die Aussage ist also erfüllt.
IS: Die Aussage sei für ein $n \geq 4$ richtig. Dann gilt

$$2^{n+1} \ = \ 2 \cdot 2^n \ \underset{\text{IH}}{\geq} \ 2 \cdot n^2 \ \underset{(*)}{\geq} \ n^2 + 2n + 1 \ = \ (n+1)^2\,.$$

Dabei gilt $(*)$: $n^2 \geq 2n + 1$ wegen

$$(n^2) - (2n+1) \ = \ n^2 - 2n + 1 - 2 \ = \ (n-1)^2 - 2 \ \geq \ 3^2 - 2 \ \geq \ 0$$

für $n \geq 4$.

b)
Induktion über n für $n \geq 2$:
IA: Auf der linken Seite steht nur der Summand $\frac{1}{2}$, auf der rechten Seite steht $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
IS: Die Aussage sei für ein $n \geq 2$ richtig, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{(n+1)-1} \frac{1}{k(k+1)} \ = \ \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ \underset{\text{IH}}{=} \ \frac{1}{n(n+1)} + 1 - \frac{1}{n}$$

$$= \ \frac{1 + n(n+1) - (n+1)}{n(n+1)} \ = \ \frac{1 + n^2 + n - n - 1}{n(n+1)} \ = \ \frac{n^2}{n(n+1)} \ = \ \frac{n}{n+1} \ = \ 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Damit ist die Aussage für alle $n \geq 2$ gezeigt.

Matrikelnummer: __________ Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 6 10 Punkte

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob die gegebenen Aussagen wahr oder falsch sind. Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird jedoch in keinem Fall mit einer negativen Anzahl Punkte bewertet. Sie können auch in einer Zeile nichts ankreuzen.

Sie müssen ihre Aussagen nicht beweisen.

Behauptung	**Wahr**	**Falsch**
Ist $\sum a_n$ konvergent, so auch $\sum a_{n_k}$ für jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).	☐	☐
Ist (a_n) eine Nullfolge, so konvergiert $\sum(-1)^k a_k$.	☐	☐
Sind $f:\ A \to B$ und $g:\ B \to C$ bijektiv, so auch $g \circ f:\ A \to C$.	☐	☐
$\forall M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset\ \exists f:\ M \to M\ \ \forall x \in M:\ f(x) \neq x$.	☐	☐
Jede absolut konvergente Reihe konvergiert gegen eine nichtnegative Zahl.	☐	☐
Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallschachtelung (I_n) mit $\{\alpha\} = \bigcap I_n$.	☐	☐
Produkte $(a_n b_n)$ von Cauchyfolgen (a_n), (b_n) sind wieder Cauchyfolgen.	☐	☐
Cauchyprodukte von Cauchyreihen sind wieder Cauchyreihen.	☐	☐
$\liminf a_n > 0$ impliziert, dass alle a_n nichtnegativ sind.	☐	☐
Besitzt eine Folge a_n genau einen Häufungswert a, so gilt $\lim a_n = a$.	☐	☐

Lösung

Behauptung	Wahr	Falsch
Ist $\sum a_n$ konvergent, so auch $\sum a_{n_k}$ für jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).	☐	☒
Ist (a_n) eine Nullfolge, so konvergiert $\sum(-1)^k a_k$.	☐	☒
Sind $f:\ A \to B$ und $g:\ B \to C$ bijektiv, so auch $g \circ f:\ A \to C$.	☒	☐
$\forall M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset\ \exists f:\ M \to M\ \ \forall x \in M:\ f(x) \neq x$.	☐	☒
Jede absolut konvergente Reihe konvergiert gegen eine nichtnegative Zahl.	☐	☒
Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallschachtelung (I_n) mit $\{\alpha\} = \bigcap I_n$.	☒	☐
Produkte $(a_n b_n)$ von Cauchyfolgen (a_n), (b_n) sind wieder Cauchyfolgen.	☒	☐
Cauchyprodukte von Cauchyreihen sind wieder Cauchyreihen.	☐	☒
$\liminf a_n > 0$ impliziert, dass alle a_n nichtnegativ sind.	☐	☒
Besitzt eine Folge a_n genau einen Häufungswert a, so gilt $\lim a_n = a$.	☐	☒

Ist $\sum a_n$ konvergent, so auch $\sum a_{n_k}$ für jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n): **FALSCH**
Die Aussage gilt nur für Folgen, aber nicht für Reihen. Beispielsweise für $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ist $\sum a_k$ konvergent, aber $\sum a_{2k}$ divergiert.

Ist (a_n) eine Nullfolge, so konvergiert $\sum(-1)^k a_k$: **FALSCH**
Das Leibnizkriterium erfordert zusätzlich die Monotonie. Beispielsweise ist $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ eine Nullfolge, aber $\sum(-1)^k a_k = \sum \frac{1}{k}$ divergiert.

Sind $f:\ A \to B$ und $g:\ B \to C$ bijektiv, so auch $g \circ f:\ A \to C$: **WAHR**
Ist $g(f(a)) = g(f(a'))$ so ist $f(a) = f(a')$, da g injektiv ist, damit auch $a = a'$ da f injektiv ist. Damit ist $g \circ f$ injektiv. Ist $c \in C$ beliebig, so gibt es ein Urbild $b \in B$ mit $g(B) = c$, da g surjektiv ist. Dann gibt es auch $a \in A$ mit $f(a) = b$ da f surjektiv ist. Damit ist $g(f(a)) = g(b) = c$, also ist a Urbild von c unter $g \circ f$, d. h. $g \circ f$ ist surjektiv. Insgesamt ist $g \circ f$ bijektiv.

$\forall M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset\ \exists f:\ M \to M\ \ \forall x \in M:\ f(x) \neq x$: **FALSCH**
Das Gegenteil ist $\exists M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset\ \ \forall f:\ M \to M\ \ \exists x \in M:\ f(x) = x$. Diese Aussage ist wahr: es gibt ein $M \subseteq \mathbb{R}$ das nicht leer ist (nämlich $M = \{0\}$), so dass für alle $f:\ M \to M$ (das kann jetzt nur die Abbildung $0 \mapsto 0$ sein, da M nur die Null enthält), gilt: $f(x) = x$ für alle $x \in M$ (und es gibt nur $x = 0$ mit $f(0) = 0$). Also ist die ursprüngliche Aussage falsch.

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert gegen eine nichtnegative Zahl: **FALSCH**
Es sei $a_1 = -1$ und $a_k = 0$ für $k \geq 2$, dann ist $\sum a_k = -1$ konvergent, und wegen $\sum |a_k| = 1$ sogar absolut konvergent. Aber $\sum a_k$ konvergiert gegen eine negative Zahl.

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallschachtelung (I_n) mit $\{\alpha\} = \bigcap I_n$: **WAHR**
Beispielsweise $I_n = [\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}]$.

Produkte $(a_n b_n)$ von Cauchyfolgen (a_n), (b_n) sind wieder Cauchyfolgen: **WAHR**

$$(a_n), (b_n) \text{ Cauchyfolgen} \underset{2.4.2}{\Rightarrow} (a_n), (b_n) \text{ konvergent} \underset{2.3.4}{\Rightarrow} (a_n b_n) \text{ konvergent} \underset{2.4.2}{\Rightarrow} (a_n b_n) \text{ Cauchyfolge} .$$

Cauchyprodukte von Cauchyreihen sind wieder Cauchyreihen: **FALSCH**
Im Satz 3.2.14 wird zusätzlich gefordert, dass die Reihen absolut konvergieren. Gegenbeispiel:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}\right) \overset{\text{HIER NICHT}}{\underset{\text{ERLAUBT}}{=}} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\frac{1}{j}(-1)^{k-j}\frac{1}{k-j} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j(k-j)}}_{\longrightarrow\infty \text{ falls } k\to\infty} .$$

$\liminf a_n > 0$ *impliziert, dass alle* a_n *nichtnegativ sind*: **FALSCH**
Es können nach Satz 2.5.4 immer noch endlich viele Folgenglieder negativ sein. Ein Beispiel ist $a_1 = -1$ und $a_n = 1$ für $n \geq 2$.

Besitzt eine Folge a_n *genau einen Häufungswert* a, *so gilt* $\lim a_n = a$: **FALSCH**
Gegenbeispiel: $a_n = n$ für ungerade n, $a_n = 0$ für gerade n. Dann ist (a_n) divergent, aber 0 der einzige Häufungswert.

Matrikelnummer: ___________ Name: __________________ Vorname: _________________

Aufgabe 7 **9 Punkte**

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche der gegebenen Aussagen zu der gegebenen Definition äquivalent sind. Zu einer Definition können jeweils auch mehrere oder keine Aussage äquivalent sein. Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird jedoch in keinem Fall mit einer negativen Anzahl Punkte bewertet. Sie können auch in einer Zeile nichts ankreuzen.

Sie müssen ihre Aussagen nicht beweisen.

Eine Funktion $f:\ A \to B$ ist surjektiv.

Dazu äquivalent:	**Ja**	**Nein**
$f^{-1}(B) = A$.	☐	☐
$f(A) = B$.	☐	☐
$g \circ f$ surjektiv für alle Mengen C und alle surjektiven $g:\ B \to C$.	☐	☐

Eine Zahlenfolge (a_n) ist streng monoton.

Dazu äquivalent:	**Ja**	**Nein**
Jede Teilfolge von (a_n) ist streng monoton.	☐	☐
Die Abbildung $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ ist injektiv.	☐	☐
Jede beschränkte Teilfolge von (a_n) konvergiert.	☐	☐

Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut.

Dazu äquivalent:	**Ja**	**Nein**
Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge.	☐	☐
$\sum(a_n + \alpha)$ konvergiert absolut für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.	☐	☐
$\sum(a_n \cdot \alpha)$ konvergiert absolut für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.	☐	☐

Lösung

Eine Funktion $f:\ A \to B$ ist surjektiv.

Dazu äquivalent:	Ja	Nein
$f^{-1}(B) = A$.	☐	☒
$f(A) = B$.	☒	☐
$g \circ f$ surjektiv für alle Mengen C und alle surjektiven $g: B \to C$.	☒	☐

Eine Zahlenfolge (a_n) ist streng monoton.

Dazu äquivalent:	Ja	Nein
Jede Teilfolge von (a_n) ist streng monoton.	☒	☐
Die Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ ist injektiv.	☐	☒
Jede beschränkte Teilfolge von (a_n) konvergiert.	☐	☒

Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut.

Dazu äquivalent:	Ja	Nein
Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge.	☐	☒
$\sum(a_n + \alpha)$ konvergiert absolut für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.	☐	☒
$\sum(a_n \cdot \alpha)$ konvergiert absolut für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.	☒	☐

$f: A \to B$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(B) = A$ **FALSCH**
Gegenbeispiel:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \{1,2\} \\ x & \mapsto & 1 \ \forall x \end{cases} .$$

Diese Funktion ist nicht surjektiv, da 2 kein Urbild besitzt. Es gilt aber $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ oder } x = 2\} = \mathbb{R}$. Die Aussage $f^{-1}(B) = A$ gilt im Übrigen für *jede* Abbildung.

$f: A \to B$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$ **WAHR**
Das ist gerade die Definition von surjektiv.

$f: A \to B$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ *$g \circ f$ surj. für alle Mengen C und alle surj. $g: B \to C$* **WAHR**
Die Hinrichtung gilt, denn wenn f und g surjektiv sind, ist auch $g \circ f$ surjektiv (vgl. entsprechende Teilaufgaber zu Bijektivität in der vorigen Aufgabe). Die Rückrichtung gilt auch: ist $g \circ f$ surjektiv für alle surjektiven g, so insbesondere für $C = B$ und für $g = \mathrm{id}$. Dann ist $\mathrm{id} \circ f = f$ surjektiv.

Eine Zahlenfolge (a_n) ist streng monoton $\Leftrightarrow$ *Jede Teilfolge von (a_n) ist streng monoton* **WAHR**
Angenommen (a_n) ist streng monoton wachsend und a_{n_k} irgend eine Teilfolge. Ist $k_1 < k_2$, so ist $n_{k_1} < n_{k_2}$ (Definition der Teilfolge) und damit $a_{n_{k_1}} < a_{n_{k_2}}$ da (a_n) streng monoton wachsend ist. Also ist auch (a_{n_k}) streng monoton wachsend. Nun sei (a_n) streng monoton fallend. Ist $k_1 < k_2$, so ist $n_{k_1} < n_{k_2}$ (Definition der Teilfolge) und damit $a_{n_{k_1}} > a_{n_{k_2}}$ da (a_n) streng monoton fallend ist. Also ist auch (a_{n_k}) streng monoton fallend. Es gilt auch die Rückrichtung: ist jede Teilfolge streng monoton, so auch (a_n) selbst, denn jede Folge ist eine Teilfolge von sich selbst.

Eine Zahlenfolge (a_n) ist streng monoton $\Leftrightarrow$ *$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ ist injektiv* **FALSCH**
Es gilt zwar die Hinrichtung (die Abbildung ist tatsächlich injektiv falls (a_n) streng monoton ist), aber

es gilt nicht die Rückrichtung: Es sei $a_n = (-1)^n \cdot n$, dann ist $f(n)$ injektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1}(x) = |x|$, aber a_n ist nicht streng monoton.

Eine Zahlenfolge (a_n) *ist streng monoton* $\Leftrightarrow$ *Jede beschränkte Teilfolge konvergiert* **FALSCH**
Die Hinrichtung gilt zwar nach Satz 2.4.1, aber die Rückrichtung ist falsch. Zur konstanten Folge $a_n = 1$ konvergiert jede Teilfolge (die auch konstant ist), aber (a_n) ist nicht streng monoton.

Eine Reihe $\sum a_n$ *konvergiert absolut* $\Leftrightarrow$ *Die Folge* (a_n) *ist eine Nullfolge* **FALSCH**
Das bekannte Gegenbeispiel ist $\sum \frac{1}{k}$ mit der Nullfolge $\frac{1}{k}$.

Eine Reihe $\sum a_n$ *konvergiert absolut* $\Leftrightarrow$ $\sum(a_n + \alpha)$ *konvergiert absolut für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ **FALSCH**
Die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut, aber nicht

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) ,$$

da die Folge $1 + \frac{1}{k^2}$ keine Nullfolge ist.

Eine Reihe $\sum a_n$ *konvergiert absolut* $\Leftrightarrow$ $\sum(a_n \cdot \alpha)$ *konvergiert absolut für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ **WAHR**
Zuerst die Rückrichtung: ist $\sum(\alpha a_n)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, so (mit der Wahl $\alpha = 1$) auch die Reihe $\sum a_n$. Nun die Hinrichtung: Konvergiert $\sum a_n$ absolut, so konvergiert nach Defininition $\sum |\alpha a_n|$. Nach Satz 3.2.5 gilt dann $\sum |\alpha a_n| = \sum(|\alpha| \cdot |a_n|) = |\alpha| \sum |a_n|$. Also ist auch $\sum \alpha a_n$ absolut konvergent.

Matrikelnummer: __________ Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 8 12 Punkte

Entscheiden Sie, ob diese Reihen konvergieren (mit Beweis):

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} \quad , \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \, .$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $(1+\frac{1}{n})^n$ für $n \to \infty$ gegen die Eulersche Zahl konvergiert.

Lösung

a)
Diese Reihe divergiert nach Satz 3.2.3: die Reihenglieder bilden keine Nullfolge, da $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ keine Nullfolge ist. Die Teilfolge b_{2n} konvergiert gegen Eins nach dem Summensatz, da dann $\frac{2n}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n}$ ist. Die Teilfolge b_{2n+1} konvergiert gegen -1, da dann $-\frac{2n+2}{2n+3} = -1 - \frac{1}{2n+1}$ ist. Die Folgen $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n+1}$ sind Nullfolgen. Also besitzt (b_n) zwei verschiedene Häufungswerte (Satz 2.5.1) und ist damit divergent (Satz 2.5.5).

b)
Es gilt für den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} = 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}e\right)^{-1} = \frac{2}{e}$$

für $n \to \infty$ nach den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 2.3.4) und dem Hinweis. Damit folgt nach Satz 2.5.5

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2}{e} \, .$$

Nach der numerischen Darstellung von e in Definition 3.3.2 folgt $\frac{2}{e} < 1$, also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Analysis I - Erste Klausur 18.12.2004

Matrikelnummer: __________ Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 9 14 Punkte

Entscheiden Sie, ob diese Reihen konvergieren (mit Beweis):

$$\text{a)} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad , \quad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} k^n q^k \ , \text{ mit } |q| < 1 \text{ und einem } n \in \mathbb{N} \, .$$

Lösung

a)
Es sei $a_k = \sqrt{k}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Multiplikation mit $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$ ergibt

$$a_k \cdot (\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \;=\; \sqrt{k} \cdot (k+1-k) \;=\; \sqrt{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \;=\; \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \, .$$

Abschätzen ergibt

$$a_k \;=\; \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \;\geq\; \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} \;=\; \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{k+1}} \;=\; \frac{1}{2} b_k \text{ mit } b_k \;=\; \sqrt{\frac{k}{k+1}} \, .$$

Da $b_k^2 = \frac{k}{k+1}$ gegen 1 strebt kann b_k keine Nullfolge sein, da sonst nach dem Produktsatz b_k^2 gegen Null streben würde. Damit ist auch $a_k \geq b_k$ keine Nullfolge, und die Reihe $\sum a_k$ divergiert nach Satz 3.2.3. Das Quotientenkriterium versagt bei dieser Reihe!

b)
Für den Quotienten zweier Glieder gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \;=\; \left| \frac{(k+1)^n \cdot q^{k+1}}{k^n \cdot q^k} \right| \;=\; \left(\frac{k+1}{k} \right)^n \cdot |q| \;=\; \left(1 + \frac{1}{k} \right)^n \cdot |q| \, .$$

Da $\frac{1}{k}$ gegen Null strebt, konvergiert nach den Rechenregeln für Folgen der Ausdruck $1 + \frac{1}{k}$ gegen Eins, damit auch das n-fache Produkt dieser Ausdrücke, da n hier fest und nicht von k abhängig ist. Nach dem Produktsatz folgt damit, dass

$$\lim_{k \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k} \right)^n \cdot |q| \right) \;=\; |q|$$

gilt, da q konstant ist. Nach Satz 2.5.5 gilt

$$\limsup_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \;=\; \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \;=\; |q| \;<\; 1 \, .$$

Nach dem Quotientenkriterium (Satz 3.2.10) ist die Reihe $\sum k^n q^k$ damit für alle $|q| < 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergent.

Analysis I - Erste Klausur 18.12.2004

Matrikelnummer: ___________ Name: _________________ Vorname: ________________

Aufgabe 10 14 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $q \in [0,1)$, dann ist q^n eine Nullfolge.

(b) Es sei (b_n) eine Folge und $q \in [0,1)$, so dass $|b_{n+1} - b_n| < q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist (b_n) eine Cauchyfolge.

Lösung

a)
Laut Vorlesung (Satz 3.2.9) ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \;=\; \frac{1}{1-q}$$

konvergent. Nach Satz 3.2.3 müssen dann die Glieder q^n eine Nullfolge bilden, was zu zeigen war.

b)
Angenommen eine Folge (b_n) erfüllt die Bedingung

$$(*)\;\; |b_{n+1} - b_n| \;<\; q^n$$

für ein $q \in [0,1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Es seien $m, p > n$, ohne Einschränkung $m > p$, dann gilt:

$$|b_m - b_p| \;=\; |(b_m - b_{m-1}) + (b_{m-1} - b_{m-2}) + \cdots + (b_{p+1} - b_p)|$$

$$\underset{\text{DrUngl.}}{\leq} |b_m - b_{m-1}| + |b_{m-1} - b_{m-2}| + \cdots + |b_{p+1} - b_p| \underset{(*)}{<} q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^p$$

$$= \; q^p \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1-p}) \;=\; q^p \cdot \frac{q^{m-p} - 1}{q - 1}$$

nach der Formel für die endliche geometrische Reihe aus dem Beweis von Satz 3.2.9. Wegen $0 \leq q < 1$ gilt zudem

$$\frac{q^{m-p} - 1}{q - 1} \;=\; \frac{1 - q^{m-p}}{1 - q} \;\leq\; \frac{1 - 0}{1 - q} \;=\; \frac{1}{1-q}\,,$$

also folgt

$$|b_m - b_p| \;<\; q^p \cdot \frac{1}{1-q} \underset{\left[\substack{q\in[0,1) \\ p>n}\right]}{\leq} q^n \cdot \frac{1}{1-q}\,.$$

Da q^n nach Teil a) eine Nullfolge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon(1-q))$, so dass $q^n < \varepsilon(1-q)$ ist für alle $n > n_0$ (dabei ist $1 - q$ nur eine Konstante). Sind $m, p > n_0$, so folgt

$$|b_m - b_p| \;<\; q^n \cdot \frac{1}{1-q} \;<\; \varepsilon \,.$$

Damit ist (b_n) eine Cauchyfolge.