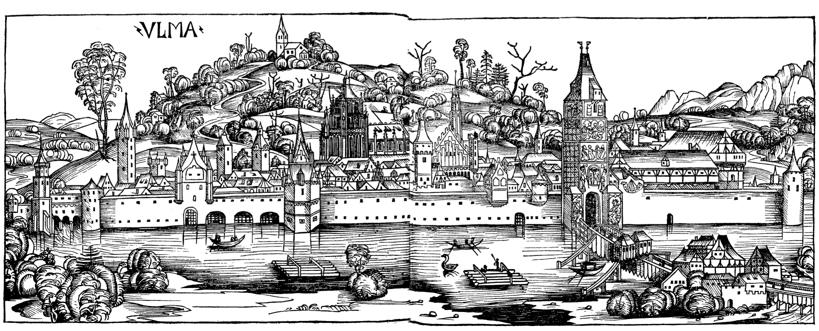
Universität Ulm
Abteilung Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Heinrich-Fabri-Institut Blaubeuren

ELAZ 2006

Tagung über
Elementare und analytische Zahlentheorie

31. Juli 2006 - 4. August 2006



Ulm um 1490

Universität Ulm
Abteilung Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

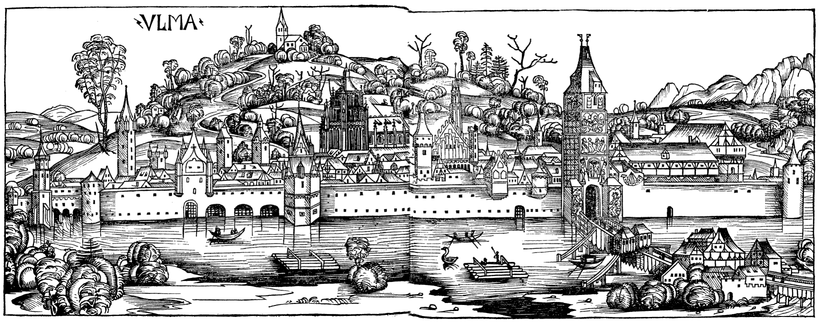
Heinrich-Fabri-Institut Blaubeuren

ELAZ 2006

Tagung über

Elementare und analytische Zahlentheorie

31. Juli 2006 - 4. August 2006



Ulm um 1490

Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft, der Ulmer Universitätsgesellschaft und der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm für Ihre finanzielle Unterstützung dieser Tagung.

Montag

07:30	-	09:00	Frühstück
09:15	-	12:15	Vorträge
12:30	-	14:00	Mittagessen
15:15	-	18:15	Vorträge
18:30			Abendessen

Dienstag

07:30	-	09:00	Frühstück
09:15	-	12:15	Vorträge
12:30	-	14:00	Mittagessen
15:15	-	18:15	Vorträge
18:30			Abendessen

Mittwoch

07:30	-	09:00	Frühstück
09:15	-	12:15	Vorträge
12:30	-	14:00	Mittagessen
			–Vortragsfrei–
18:30	-	19:30	Abendessen
20:00			Problem Session

Donnerstag

07:30	-	09:00	Frühstück
09:15	-	12:15	Vorträge
12:30	-	14:00	Mittagessen
15:15	-	18:15	Vorträge
19:00			Festliches Bankett

Freitag

07:30	-	09:00	Frühstück
09:15	-	12:15	Vorträge
12:30	-	14:00	Mittagessen
15:15	-	18:15	Vorträge
18:30			Abendessen

Das Vortragsprogramm wird aktuell ausgehängt.

Vortragsthemen

Michel Balazard
On the elementary proof of the Prime Number Theorem

Valentin Blomer
L-Funktionen im kritischen Streifen

Kathrin Bringmann
Freeman Dyson's "Challenge for the Future": The mock theta functions

Jörg Brüdern
Weyl sums and almost equal variables in Waring's problem

Peter Bundschuh
Zum Irrationalitätsexponenten eines q-Analogons von π und verwandter q-Reihen

Yvonne Buttkewitz
Über aufeinander folgende Werte spezieller zahlentheoretischer Funktionen

Rainer Dietmann
Darstellung ganzer Zahlen durch quadratische Formen

Christian Elsholtz
Multidimensional Zero-sum problems

Carsten Elsner
New series transformations for Euler's constant

Karin Halupczok
Das ternäre Goldbachproblem mit Primzahlen in Restklassen zu verschiedenen Moduln

Bernhard Heim
Congruences of Ramanujan - revisited

Jerzy Kaczorowski
Large values of sums involving the Möbius function

Günther Köhler
Beispiele von Theta-Eta-Identitäten

Hans Günther Kopetzky
Rationale Approximationen auf der Lemniskate

Antanas Laurinčikas
Discrete limit theorems for the Mellin transform of the fourth power of the Riemann zeta-function

Lutz Lucht
Solutions to arithmetic convolution equations

Manfred Madritsch
Generating normal numbers for a given base q

Helmut Maier
Exponential sums with multiplicative coefficients

EUGENIJUS MANSTAVIČIUS
Value distribution for additive functions on the symmetric group

SAMUEL J. PATTERSON
Gauß sums over function fields

JÁNOS PINTZ
Small gaps between primes and almost primes

ŠTEFAN PORUBSKÝ
Generalized primitive sequences

MACIEJ RADZIEJEWSKI
Singularities of Dirichlet series related to generalized Hilbert semigroups

TANGUY RIVOAL
Hypergeometry and the Riemann zeta function

ANDRÁS SÁRKÖZY
Equations in finite fields with restricted solution sets

ANDRZEJ SCHINZEL
The number of solutions in a box of a linear homogeneous congruence

JAN-CHRISTOPH SCHLAGE-PUCHTA
Exponentialsummen über ganze Zahlen mit vorgeschriebener Quersumme und k-Tupel von Nivenzahlen

WOLFGANG A. SCHMID
On the number of algebraic integers with prescribed period

JOHANNES SCHOISSENGEIER
Über die Ungleichung von Koksma aus der Theorie der Gleichverteilung

JÖRN STEUDING
On the value-distribution of Epstein zeta-functions

JÖRG THUSWALDNER
Verallgemeinerte Ziffernsysteme und dynamische Systeme

STEPHAN WAGNER
Numbers with fixed sum of digits in linear recurrent number systems

ROLF WALLISER
Eine Anwendung von Sätzen über verallgemeinerte hypergeometrische Reihen für Irrationalitätsaussagen

MICHAEL WELTER
On integer-valued functions

EDUARD WIRSING
Differenzen-Boxen

DIETER WOLKE
Über den vermuteten Fehlerterm im Primzahl-Zwillingsproblem

Vorträge ELAZ 2006

Michel Balazard

On the elementary proof of the Prime Number Theorem

The talk consists of some rather disconnected remarks on elementary prime number theory. A first theme is the question wether the equivalence between the forms of the Riemann hypothesis in terms of the Moebius and Mangoldt functions admits an elementary proof. A second theme is the relevance of Appell polynomials to the generalisation of the Selberg formula (asymptotic formula for the generalised Mangoldt Function).

Valentin Blomer

L-Funktionen im kritischen Streifen

Es werden Techniken vorgestellt, klassische Familien von L-Funktionen auf der kritischen Gerade $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ abzuschätzen. In Analogie zu Heath-Browns hybriden Wachstumsschranken für Dirichletsche L-Funktionen liefern diese Methoden zum Beispiel im komplizierteren Fall von L-Funktionen zu Twists automorpher Formen f mit Charakteren χ modulo q neue Schranken, die simultan in s und q die Konvexitätsschranken brechen:

$$L(s, f \otimes \chi) \ll_{f,\varepsilon} (|s|q)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{40}+\varepsilon}.$$

Solche und ähnliche Abschätzungen haben zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel auf quadratische Formen, insbesondere aber auf Wachstumsschranken von L-Funktionen höheren Grades.

Kathrin Bringmann

Freeman Dyson's "Challenge for the Future": The mock theta functions

In his last letter to Hardy, Ramanujan defined 17 peculiar functions which are now referred to as his mock theta functions. Although these mysterious functions have been investigated by many mathematicians over the years, many of their most basic properties remain unknown. This inspired Freeman Dyson to proclaim:

"The mock theta-functions give us tantalizing hints of a grand synthesis still to be discovered. Somehow it should be possible to build them into a coherent group-theoretical structure, analogous to the structure of modular forms which Hecke built around the old theta-functions of Jacobi. This remains a challenge for the future."

Here we announce a solution to Dyson's "Challenge for the future" by providing the "coherent group-theoretical structure" that Dyson desired in his plenary address at the 1987 Ramanujan Centenary Conference.

In joint work with Ken Ono, we show that Ramanujan's mock theta functions, as well as an infinite class of naturally generalized mock theta functions may be 'completed' to obtain Maass forms, a special class of modular forms. We then use these results to prove theorems about Dyson's partition ranks. In particular, we shall prove the 1966 Andrews-Dragonette Conjecture, whose history dates to Ramanujan's last letter to Hardy, and we shall also prove that Dyson's ranks 'explain' Ramanujan's partition congruences in an unexpected way.

Jörg Brüdern

Weyl sums and almost equal variables in Waring's problem

We study the classical Waring problem, but try to keep all variables as close together as is possible. When $k > 2$ and s are fixed, this amounts to solving the diophantine equation

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k = n$$

subject to the constraints $X - Y < x_j < X + Y$ where $X = (n/s)^{1/k}$ and Y is as small as possible. Wright has shown in the 1930ies that one must have $Y \gg X^{1/2}$ even if s is very large.

We shall describe work of Dirk Daemen in a Stuttgart thesis. He shows that one may indeed take $Y \ll X^{1/2}$ and still guarantee solubility for all large n provided only that $s \gg k^2 \log k$. The method is not at all straightforward, and as an additional benefit, one gets an Omega-result for Weyl sums

$$\sum_{x \leq N} e(\alpha x^k)$$

that destroys one of the few dreams prominent researches had gone through as a possible avenue towards Hardy and Littlewood's conjecture K on average.

Peter Bundschuh

Zum Irrationalitätsexponenten eines q-Analogons von π und verwandter q-Reihen

Im Mittelpunkt des Vortrags stehen arithmetische Ergebnisse über gewisse Lambert-Reihen, die in jüngster Zeit — teilweise gemeinsam mit W. Zudilin bzw. K. Väänänen — erzielt wurden. Bei diesen Reihen handelt es sich (oft) um q-Analoga klassischer Konstanten wie etwa π oder $\log 2$. Es wird eine Methode zur Gewinnung qualitativer und quantitativer Aussagen über Irrationalität bzw. lineare Unabhängigkeit solcher Reihen skizziert.

Yvonne Buttkewitz

Über aufeinander folgende Werte spezieller zahlentheoretischer Funktionen

Schlage-Puchta konnte zeigen, dass es beliebig viele aufeinander folgende Zahlen gibt, die die gleiche Primteileranzahl besitzen. Zum selben Ergebnis kommt man mit Hilfe der Vorgehensweise von Heath-Brown aus „The divisor function at consecutive integers.“ (Mathematika 31, 141-149)

Rainer Dietmann

Darstellung ganzer Zahlen durch quadratische Formen

In einer gemeinsamen Arbeit mit Tim Browning verwenden wir Heath-Brown's neue Form der Kreismethode, um Bedingungen an eine ganze Zahl n zu finden, von einer gegebenen quadratischen Form Q dargestellt zu werden. Dabei untersuchen wir sowohl den Fall indefiniter als auch positiv definiter Formen. Im ersten Fall konzentrieren wir uns auf $n = 0$ und finden eine neue Schranke an die kleinste ganzzahlige nichttriviale Nullstelle einer ganzzahligen quadratischen Form, die unter bestimmten Voraussetzungen („generische quadratische Formen“) schärfer als die bekannten Schranken von Cassels und deren Verallgemeinerungen durch Schlickewei und Schmidt ist. Im zweiten Fall finden wir eine neue von $\det Q$ abhängige obere Schranke für das größte positive n, das nicht von Q dargestellt wird, obwohl alle lokalen Lösbarkeitsbedingungen erfüllt sind. Dies stellt eine explizite Form von Tartakowskys Satz dar und verbessert bekannte Resultate von Watson und Hsia & Icaza im Falle von 7, 8, und 9 Variablen sowie für generische quadratische Formen in vielen Variablen.

Christian Elsholtz

Multidimensional Zero-sum problems

For a finite abelian group G let $\mathsf{s}(G)$ denote the smallest integer l such that every sequence S over G of length $|S| \geq l$ has a zero-sum subsequence of length $\exp(G)$, the smallest n with $ng = 0\ \forall g \in G$. In particular, the case $G = C_n^r$ has attracted a great deal of attention. For example, Alon and Dubiner proved that for fixed r: $\mathsf{s}(C_n^r) \leq c_r n$ holds, and Meshulam proved $\mathsf{s}(C_3^r) = O(\frac{3^r}{r})$.

We derive new upper and lower bounds for $\mathsf{s}(G)$ and all our bounds are sharp for special types of groups. In particular, we show $\mathsf{s}(C_n^4) \geq 20n - 19$ for all odd n which is sharp if n is a power of 3. Moreover, we investigate the relationship between extremal sequences and maximal caps in finite geometry.

Carsten Elsner

New series transformations for Euler's constant

Let $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$. In 1995, the author found a series transformation of the type $\sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k,\tau} s_{k+\tau}$ with integer coefficients $\mu_{n,k,\tau}$ from which geometric convergence to Euler's constant γ for $\tau = O(n)$ results. In recently published papers *T. Rivoal* and *Kh.&T. Hessami Pilehrood* have generalized this result. In the talk we introduce a series tranformation $\sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k,\tau_1} s_{k+\tau_2}$ with two parameters τ_1 and τ_2 satisfying $\tau_1 + 1 \leq \tau_2 \leq n + \tau_1 + 1$, and integer coefficients μ_{n,k,τ_1}. By applying the Mellin-Barnes integral representation of the ${}_3F_2$-function, combinatorial identities, and the analysis of the ψ-function, for $n = 2m$, $\tau_1 = m - 1$ and $\tau_2 = 2m$ we prove that

$$S \ := \ \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k,\tau_1} s_{k+\tau_2} \ - \ \gamma \right| \ \leq \ \frac{m}{2} \cdot |\zeta(2) - q_m| \ ,$$

where the q_m are explicitly given rational numbers Finally, $\zeta(2) - q_m$ can expressed in terms of Legendre-type integrals, which give upper bounds for S. In particular, for $n = 2m$, $\tau_1 = m - 1$ and $\tau_2 = 2m$ this bound equals to $2m \cdot 64^{-m}$.

Karin Halupczok

Das ternäre Goldbachproblem mit Primzahlen in Restklassen zu verschiedenen Moduln

Wir betrachten das ternäre Goldbachproblem $n = p_1 + p_2 + p_3$ mit Primzahlen $p_i \equiv a_i \pmod{q_i}$, wobei $q_i > 1$, $0 \leq a_i < q_i$ und $(a_i, q_i) = 1$ für $i = 1, 2, 3$.

Für

$$J_3(n) := \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n \\ m_i \equiv a_i \pmod{q_i} \\ i=1,2,3}} \Lambda(m_1)\Lambda(m_2)\Lambda(m_3),$$

eng verknüpft mit der Anzahl der Darstellungen von n auf diese Art, beweisen wir mit der Kreismethode folgendes: Für alle $C, D, \theta, A > 0$ gilt

(1)

$$\sum_{q_1 \leq \frac{n^{1/2}}{(\log n)^C}} \sum_{q_2 \leq \frac{n^{1/3}}{(\log n)^D}} \sum_{q_3 \leq (\log n)^\theta} \max_{\substack{(a_i,q_i)=1 \\ i=1,2,3}} \left| J_3(n) - \frac{n^2 \mathcal{S}_3(n)}{2\varphi(q_1)\varphi(q_2)\varphi(q_3)} \right| \ll \frac{n^2}{(\log n)^A}$$

mit der zugehörigen singulären Reihe $\mathcal{S}_3(n)$, und vermutlich gilt diese Aussage auch für Modulbereiche $q_1, q_2, q_3 \leq n^{1/2}/(\log n)^C$.

Auf den Major arcs um a/q der Länge R/qn, für $q \leq R$ und $R = (\log n)^B$, $B = B(A) > 0$, läßt sich diese Vermutung (mit dem Satz von Bombieri-Vinogradov) zeigen, nicht jedoch auf den zugehörigen minor arcs. Dort kann man mit Hilfe der Besselschen Ungleichung, dem großen Sieb mit einer Formel von Montgomery, sowie einem Lemma von Balog lediglich obiges Ergebnis (1) erzielen. Eine Erweiterung des Modulbereiches für q_3 auf eine Potenz von n scheint mit dieser Methode aussichtslos.

Bernhard Heim

Congruences of Ramanujan - revisited

The famous Ramanujan Δ-function

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

has many remarkable properties. In 1916 Ramanujan gave a proof of the congruence

$$\tau(n) \;\equiv\; \sum_{d|n} d^{11} \;(\bmod\ 691)\,.$$

In this talk we present a modern viewpoint and proof of such properties.

Jerzy Kaczorowski

Large values of sums involving the Möbius function

Large vales of sums involving Möbius function twisted by the classical cosine function shall be discussed. Estimates as sharp as $\Omega(\sqrt{x}\log\log\log x)$ will be presented. They suggest that the best known result $\limsup_{x\to\infty}|\sum_{n\le x}\mu(n)|x^{-1/2}\ge 1.06$ due to A. Odlyzko and H. te Riele is far from being optimal. For the proof the behaviour of certain holomorphic function on the upper half-plane is studied as the real axis is approached.

Günther Köhler

Beispiele von Theta-Eta-Identitäten

Heckesche Thetareihen zu imaginär-quadratischen Zahlkörpern bieten eine Möglichkeit zur Konstruktion von Modulformen; sie sind Eigenformen vom "CM-Typ". Viele dieser Thetareihen sind identisch mit Etaprodukten oder Linearkombinationen von Etaprodukten. Besonders häufig tritt diese Situation für Modulformen vom Gewicht 1 auf. Es gibt auch Fälle der Identität von Thetareihen vom Gewicht 1 zu zwei verschiedenen Zahlkörpern. Im Vortrag werden einige derartige Beispiele vorgestellt. Aus der Fülle möglicher Beispiele wurden Etaprodukte zu einer Kongruenzgruppe der Stufe 32 ausgewählt.

Hans Günther Kopetzky

Rationale Approximationen auf der Lemniskate

Approximationen von beliebigen Punkten auf einfachen ebenen Kurven, z.B. Kreisen, durch Punkte mit rationalen Koordinaten wurden bereits verschiedentlich untersucht. Insbesondere ist in diesem Zusammenhang E. Hlawka zu nennen, der neben der Approximation auf Kreisen (pythagoräische Dreiecke) auch verschiedene Untersuchungen allgemeiner Art angestellt hat. Im Vortrag wird nun die rationale Approximation von Punkten auf einer Lemniskate behandelt. Nach Definition einer geeigneten simultanen Approximationskonstanten für beide Koordinaten der Punkte auf der betrachteten Lemniskate, die sich aus einer rationalen Parametrisierung dieser Kurve ergibt, werden Fragen in Analogie zu Approximationssätzen für Punkte auf Kreisen besprochen, die früher vom Autor untersucht wurden.

Antanas Laurinčikas

Discrete limit theorems for the Mellin transform of the fourth power of the Riemann zeta-function

As usual, denote by $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, the Riemann zeta-function. For the investigation of power moments of $\zeta(s)$ A. Ivič, M. Jutila and Y. Motohashi in a series of papers successfully applied the modified Mellin transforms

$$\mathcal{Z}_k(s)=\int\limits_1^\infty \bigl|\zeta(\tfrac{1}{2}+ix)\bigr|^{2k}x^{-s}\mathrm{d}x,\quad k\geq 0,\quad \sigma\geq\sigma_0(k)>1.$$

In [**3**] we obtained probabilistic limit theorems for $\mathcal{Z}_2(s)$. The aim of this report is to present discrete limit theorems for $\mathcal{Z}_2(s)$. Let, for $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\mu_N(...)=\frac{1}{N+1}\sum_{\substack{0\leq m\leq N\\ ....}}1,$$

where in place of the dots a condition to be satisfied by m should be written, let $h>0$ be a fixed number and let $\mathcal{B}(S)$ stand for the class of Borel sets of the space S. Denote by $\mathbb{C}$ the complex plane.

Theorem 1. *Let $\frac{7}{8}<\sigma<1$. Then on $\bigl(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C})\bigr)$ the probability measure*

$$\mu_N\bigl(\mathcal{Z}_2(\sigma+imh)\in A\bigr),\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to some probability measure P_σ as $N\to\infty$.

Denote by $H(D)$, $D=\{s\in\mathbb{C}:7/8<\sigma<1\}$, the space of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compacta.

Theorem 2. *On $\bigl(H(D),\mathcal{B}(H(D))\bigr)$ the probability measure*

$$\mu_N\bigl(\mathcal{Z}_2(s+imh)\in A\bigr),\qquad A\in\mathcal{B}\bigl(H(D)\bigr),$$

converges weakly to some probability measure P as $N\to\infty$.

The width of the region D reflects present knowledge about estimates and mean-square estimates for $\mathcal{Z}_2(s)$.

Lutz Lucht

Solutions to arithmetic convolution equations

In the $\mathbb{C}$-algebra $\mathcal{A}$ of arithmetic functions $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, endowed with the usual pointwise linear operations and the Dirichlet convolution, let g^{*k} denote the convolution power $g * \cdots * g$ with k factors $g \in \mathcal{A}$. We investigate the solvability of polynomial equations of the form $a_d * g^{*d} + a_{d-1} * g^{*(d-1)} + \cdots + a_1 * g + a_0 = 0$ with fixed coefficients $a_d, a_{d-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathcal{A}$, and correct some false statements in the literature. In some cases these solutions have specific properties and can be determined explicitly. In particular, the property of the coefficients to belong to convergent Dirichlet series transfers to those solutions $g \in \mathcal{A}$, whose values $g(1)$ are simple zeros of the polynomial $a_d(1)z^d + a_{d-1}(1)z^{d-1} + \cdots + a_1(1)z + a_0(1)$. (Joint work with Helge Glöckner, Darmstadt, and Štefan Porubský, Prague)

Manfred Madritsch

Generating normal numbers for a given base q

Starting with a short introduction concerning the definition of normality and absolute normality the talk continues by giving the simple algorithm of Champernowne and the one by Erdős-Copeland as examples. Then it explaines the construction of normal numbers with the help of functions. First polynomials with rational and real coefficients are considered. Secondly the talk shows the newest result on constructions with entire functions of logarithmic growth.

Helmut Maier

Exponential sums with multiplicative coefficients

We consider sums of the form

$$\sum_{n \le x} f(n) e(n\alpha) \quad , \quad e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} \ , \ f \text{ multiplicative} .$$

In a recent paper A. Sankaranarayanan and the speaker prove a special case of a result of G. Bachman, using a novel method. This method also could be applied to the case where the sum is extended over smooth numbers only.

EUGENIJUS MANSTAVIČIUS

Value distribution for additive functions on the symmetric group

Let $\mathbf{S}_n$ be the symmetric group of permutations σ acting on n places. By definition, a real valued additive function $h(\sigma)$ has a decomposition

$$h(\sigma) = \sum_{j \le n} h_j\big(k_j(\sigma)\big),$$

where $k_j(\sigma)$ is the number of cycles of length j in the permutation σ and $\{h_j(k)\}$, is a two dimensional array with $h_j(0) \equiv 0$ for $1 \le j \le n$. Let ν_n be the uniform measure on $\mathbf{S}_n$. We investigate the asymptotic value distribution, e.g. the behavior of $\nu_n\big(h(\sigma) \in B\big)$, where $B \subset \mathbf{R}$, as $n \to \infty$. The results show a strong analogy with the theory developed for number theoretical functions. In the talk, we will concentrate on the problem of estimating momentums. In particular we give the following theorem.

Set $h^{(\lambda)}(\sigma) = h(\sigma) - \lambda n$,

$$M_n(h, A, \beta) = \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} |h(\sigma) - A|^\beta \right)^{1/\beta},$$

and

$$A_n(h) = \sum_{jk \le n} \frac{h_j(k)}{j^k k!} i\,, \qquad B_n(h, \beta) = \left(\sum_{jk \le n} \frac{|h_j(k)|^\beta}{j^k k!} \right)^{1/\beta},$$

where $A \in \mathbf{R}$ and $\beta > 0$.

Theorem. *Let $n \ge n_0(\beta)$ be sufficiently large. If $\beta \ge 2$, then*

$$M_n(h, A, \beta) \asymp_\beta \min\Big\{ |A_n(h^{(\lambda)}) - A + \lambda n| + B_n(h^{(\lambda)}, 2) + B_n(h^{(\lambda)}, \beta) : \ \lambda \in \mathbf{R} \Big\}.$$

If $\beta < 2$, a similar result is valid after some truncation of the values of $|h_j(k) - \lambda jk|$ for $jk \le n$.

We use ideas that originated in papers of J. Kubilius, I.Z. Ruzsa, A. Hildebrand, P.D.T.A. Elliott, and other authors.

Samuel J. Patterson

Gauß sums over function fields

The theory of Gauss and Jacobi sums is the basis of classical cyclotomy. One knows that Jacobi sums are essentially Hecke Größencharaktere and their large scale behaviour therefore follows from Hecke's theory of the corresponding L-functions. The situation is quite different with Gauss sums and it was with the development of Kubota's theory of metaplectic forms that a new tool became available to investigate these and related functions. The theory also leads to new classes of arithmetical functions which appear to be of interest in their own right. The same theory applies to the case of function fields over finite fields. Even in the case of rational fields the results are interesting and yield, for example, new insights into the distribution of the values of discriminants of polynomials over finite fields.

János Pintz

Small gaps between primes and almost primes

In the lecture we will report about the history and the recent developments concerning small differences between consecutive primes and almost primes. The results are joint with D.A. Goldston and C.Y.Yildirim, and partly with S.W. Graham. Let p and p' denote consecutive primes and q and q' denote consecutive almost primes with exactly two prime divisors. The most important unconditional results are the following. **Theorem A.** For every positive constant c we have infinitely many primes p with $p' - p < c \log p$. **Theorem B.** We have infinitely often $q' - q \leq 6$. Further, the method of the proof of Theorem A yields that if the primes have a level of distribution larger than $\frac{1}{2}$ (that is the Bombieri-Vinogradov theorem can be improved) then bounded differences occur between consecutive primes infinitely often.

Štefan Porubský

Generalized primitive sequences

Let $\mathbb{G}$ denote a free commutative semigroup relative to a multiplication operation denoted by juxtaposition, with identity element $1_{\mathbb{G}}$ and with at most countably many generators. Such a semigroup will be called **arithmetical semigroup**, cf. Knopfmacher [**2**], if in addition a real–valued **norm** $|\cdot|$ is defined on $\mathbb{G}$ such that

(1) $|1_{\mathbb{G}}| = 1, |a| > 1$ for all $a \in \mathbb{G}$,
(2) $|ab| = |a| \cdot |b|$ for all $a, n \in \mathbb{G}$,
(3) the total number $N_{\mathbb{G}}(x)$ of elements $a \in \mathbb{G}$ of norm not exceeding x is finite for each real x.

The arithmetical semigroups $\mathbb{G}$ satisfies the so–called Axiom A if: *There exist positive constants A and δ and a constant η with $0 \leq \eta < \delta$, such that*

$$N_{\mathbb{G}}(x) = Ax^{\delta} + O(x^{\eta}).$$

A sequence $\{a_i\} \subset \mathbb{G}$ is called *primitive* if none of its elements is divisible by another one (cf. Halberstam-Roth [**1**] for a survey on integral primitive sequences). We shall discuss some extensions of the basic results of F. Behrend, S. Pillai, P. Erdős, A. Sárközy and E. Szemerédi on integral primitive sequences to arithmetical semigroups satisfying Axiom A, including the modification when the standard divisibility is replaced by the modification introduced by Narkiewics [**4**], where the set of all divisors $D(n)$ of n is replaced by a subset $A(a)$ of the set $D(a)$ satisfying certain regularity criteria.

Maciej Radziejewski

Singularities of Dirichlet series related to generalized Hilbert semigroups

Counting functions of sets of algebraic numbers with prescribed factorisation properties are related to analytic properties of the corresponding zeta functions. In particular the existence of appropriate singularities of a zeta function $\zeta(s, A)$ of a set A often implies the oscillations of the counting function $A(x)$ about its main term. The existence of singularities may be established based on the arithmetic structure of the set in question, and the analytic properties (e.g. independence) of the L functions involved. We show a few cases where this can be done for semigroups of a special type and in a more general setting.

Tanguy Rivoal

Hypergeometry and the Riemann zeta function

Hypergeometric series have recently been used in the study of the diophantine nature of the values of the Riemann zeta function at positive integers. After presenting known results, I will explain how further improvements would follow from the proof of the “Denominators Conjecture”, and I will present a proof of an important part of this conjecture. Finally, I will indicate a generalisation of this hypergeometric approach to multiple zeta values.

András Sárközy

Equations in finite fields with restricted solution sets

A survey of five papers will be given. In the first two papers I proved that if $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ are large subsets of $\mathbb{F}_p$ (more precisely, $|\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}|\,|\mathcal{C}|\,|\mathcal{D}| \gg p^3$) then the equations

$$a + b = cd$$

resp.

$$ab + 1 = cd$$

can be solved with a, b, c, d belonging to $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{D}$. These theorems generalize some earlier results.

In three other papers written jointly with K. Gyarmati we extended and generalized these results in various directions. In the first of these papers we estimated related character sums. In the second paper we generalized these results to finite fields, and we also studied other algebraic equations in several variables. In the third paper we studied „hybrid“ problems, i.e., equations involving both elements of large but otherwise unspecified sets as above and elements of special sets.

Andrzej Schinzel

The number of solutions in a box of a linear homogeneous congruence

Theorem. Let a_i, b_i $(i = 1, \dots, k)$ be integers, $b_i > 0$, $n = \prod_{j=1}^{l} q_j^{\alpha_j}$, q_j distinct primes, $\alpha_j > 0$. If

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{q_j} \le 1 + \frac{\min(l, 2l-5)}{n},$$

then the number of solutions of the congruence $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \equiv 0 \pmod{n}$ such that $0 \le x_i \le b_i$ is at least

$$2^{1-n} \prod_{i=1}^{k} (b_i + 1).$$

Jan-Christoph Schlage-Puchta

Exponentialsummen über ganze Zahlen mit vorgeschriebener Quersumme und k-Tupel von Nivenzahlen

Sei $\mathfrak{s}_q(n)$ die Quersumme von n im Stellensystem zur Basis q. Eine Zahl n heißt q-Nivenzahl, falls $\mathfrak{s}_q(n)|n$. Ich betrachte die Exponentialsumme

$$S(x, s, q, \alpha) = \sum_{\substack{n \le x \\ \mathfrak{s}_q(n) = s}} e(n\alpha x)$$

und zeige, dass für $q \ge 6$ und $\|(q-1)\alpha\| > x^{-1/3}$ eine Abschätzung der Form $S(x, s, q, \alpha) \ll x^{1-\theta_q}$ gilt. Als Anwendung ergeben sich asymptotische Formeln für die Anzahl der k-Tupel aufeinanderfolgender q-Nivenzahlen.

Wolfgang A. Schmid

On the number of algebraic integers with prescribed period

Let K be an algebraic number field and R its ring of integers. Every $a \in R$ has a factorization $a = u_1 \dots u_l$ into irreducible elements (atoms) of R; we call l the length of the factorization. Yet, in general there is no unique factorization. We denote by $L(a) = \{l \ : \ a \text{ has factorization of length } l\}$. In the 1960s W. Narkiewicz started a systematic investigation of quantitative problems arising from phenomena of non-unique factorizations. In particular, it is known that almost all (density 1) elements have "large" sets of lengths. However, large sets of lengths have "structure": A. Geroldinger proved that for each $a \in R$ the set $L(a)$ is an almost arithmetical multiprogression with bounds just depending on R. Roughly, this means that up to a fixed number of exceptions $L(a)$ is equal to $\{y + \mathcal{D} + id \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ for positive integers y,d and $\{0, d\} \subset \mathcal{D} \subset [0, d]$. For some integer d and a subset $\{0, d\} \subset \mathcal{D} \subset [0, d]$, let $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = \{a \in R \ : \ L(a) \text{ has period } \mathcal{D}\}$, and let $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(x) = \{a \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \ : \ N(a) \leq x\}$. It is known, by a result of A. Geroldinger and F. Halter-Koch, that $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(x) \sim Cx(\log(x))^{-A}(\log\log x)^{B}$.

In this talk we present results on the value of the constants A and B. More specifically, in order to determine the numerical value of these constants it is necessary, as for related counting functions, to solve combinatorial problems in the block monoid over the class group of R. We solve this problems under certain conditions on the class group and the set $\mathcal{D}$. Moreover, we verify, in certain cases, that conditions, which by results of M. Radziejewski, imply "oscillations" of $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(x)$ are fulfilled.

Johannes Schoissengeier

Über die Ungleichung von Koksma aus der Theorie der Gleichverteilung

Die Ungleichung von Koksma besagt folgendes: ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine periodische Funktion mit Periode 1, hat f im Intervall $[0,1]$ die beschränkte Schwankung V, ist $\omega = (x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen und $D_N^*(\omega)$ ihre Diskrepanz modulo 1, also

$$D_N^*(\omega) \ := \ \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \sum_{n=1}^{N} c_{[0,x)}(\{x_n\}) - Nx \right| \ ,$$

wobei $\{y\}$ den Bruchteil von y und c_A die charakteristische Funktion der Menge A bezeichnet, so ist

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - N \int_0^1 f(x)dx \right| \ \leq \ V D_N^*(\omega) \ .$$

Nun weiß man, daß die rechte Seite (außer im trivialen Fall, daß f konstant ist) niemals beschränkt ist. Dagegen stellt sich heraus, daß die linke Seite für so manche Folge ω und halbwegs vernünftige Funktionen f sehr wohl beschränkt bleibt. Erste Ergebnisse in diese Richtung stammen von Hellekalek und Larcher und auch von Roçadas. Wir zeigen hier das folgende weitergehende Resultat.

SATZ: Es sei α eine Irrationalzahl im Intervall $[0,1]$ mit der Kettenbruchentwicklung $[0; a_1, a_2, \ldots]$ und den Näherungsbrüchen $\frac{p_n}{q_n}$. Ferner sei N eine positive ganze Zahl mit der Ostrowskientwicklung $N = b_0 q_0 + \ldots + b_m q_m$ (d.h. die b_i sind nicht negative ganze Zahlen, die Ziffern der Entwicklung, sodaß $b_i \leq a_{i+1}$, $b_0 < a_1$ ist und aus $b_i = a_i + 1$ folgt: $b_{i-1} = 0$). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine periodische Funktion mit Periode 1 und Stammfunktion einer Funktion beschränkter Schwankung. Dann ist

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} f(\alpha n) - N\int_0^1 f(x)dx \\ = &\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{q_i\alpha - p_i} \int_0^1 \left(\{q_i x\} - \tfrac{1}{2}\right)\Big(f\big(x + b_i(q_i\alpha - p_i)\big) - f(x)\Big)dx \ + \ O(1) \ . \end{aligned}$$

Dabei ist die O-Konstante von α (und natürlich von N) unabhängig. Das hat z.B. zur Folge, daß für diese f und fast alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Differenz

$$\sum_{n=1}^{N} f(\alpha n) \ - \ N \int_0^1 f(x)dx$$

beschränkt ist. Diese α können mit der Kettenbruchentwicklung auch angegeben werden.

Jörn Steuding

On the value-distribution of Epstein zeta-functions

We investigate the value-distribution of Epstein zeta-functions. We show that a generic Epstein zeta-function

$$\zeta(s;\mathcal{Q})=\sum_{0\neq\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{Q}[\mathbf{x}]^{-s}$$

associated with a positive definite quadratic form $\mathcal{Q}[\mathbf{x}]=\mathbf{x}^t\mathcal{Q}\mathbf{x}$ (for $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ and a positive definite $n\times n$ matrix $\mathcal{Q}$) in $n>2$ variables has an asymmetric distribution of nontrivial zeros with respect to the critical line $\operatorname{Re}s=n/4$; the deviation is determined by geometrical data of the lattice generated by $\mathcal{Q}[\mathbf{x}]$ (namely the lattice density and the kissing number of the lattice and its dual). However, the mean-value of the real parts of the nontrivial zeros exists and is equal to $n/4$. The proof relies on a method of Levinson & Montgomery.

Jörg Thuswaldner

Verallgemeinerte Ziffernsysteme und dynamische Systeme

In meinem Vortrag möchte ich über eine Klasse von dynamischen Systemen sprechen, die in Zusammenhang mit verschiedenen verallgemeinerten Ziffernsystemen wie β-Entwicklungen und kanonischen Ziffernsystemen stehen. Ich möchte einen Überblick über die Eigenschaften dieser dynamischen Systeme geben.

Stephan Wagner

Numbers with fixed sum of digits in linear recurrent number systems

The study of integer sets with specified conditions on the q-adic expansions has become quite popular in the past decade due to the work of Mauduit, Sárközy and others. In this talk, integers with fixed sum of digits are discussed in a more general setting, namely in a linear recurrent digit system (such as the very well-known Zeckendorf expansion). In order to obtain information on the arithmetic properties (mainly, the distribution in residue classes), some ingredients from Diophantine approximation are necessary to prove estimates on exponential sums which can be achieved by more elementary means in the case of ordinary q-adic expansions. As an example, one can show that integers with a prescribed number of 1's in the Zeckendorf expansion are uniformly distributed in residue classes modulo arbitrary integers m.

Rolf Walliser

Eine Anwendung von Sätzen über verallgemeinerte hypergeometrische Reihen für Irrationalitätsaussagen

Vor kurzem habe ich die Methode von Hilbert-Perron-Skolem benutzt, um einige bekannte Resultate über Q-lineare Unabhängigkeit von Werten der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe

$$G(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{Q(1)Q(2)\cdots Q(n)} \;\; , \;\; Q \in \mathbb{Z}[z] \;\; , \;\; \operatorname{Grad} Q \; = \; k \; \geq \; 1 \, ,$$

in einfacher Weise wiederzugewinnen. Hier sollen nun diese Aussagen erweitert werden auf eine Funktion G^*, die aus G ensteht, indem man die Folge der Koeffizientenzähler $(1, 1, \ldots)$ durch eine Folge ersetzt, die einer linearen Differenzengleichung genügt. Man gewinnt zum Beispiel diophantische Approximationsaussagen der folgenden Art:

Beispiel: Es seien κ die Anzahl der irreduziblen Faktoren bei der Zerlegung von Q über $\mathbb{Z}$, $\{c_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$ die Fibonacci-Folge. Dann gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ zwei positive Konstanten $q_0(\varepsilon)$ und $c(\varepsilon)$, so daß für alle $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $q > q_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{Q(1)Q(2)\cdots Q(n)} \; - \; \frac{p}{q} \right| \; \geq \; c(\varepsilon) \cdot q^{-\left(\frac{2k+1}{\kappa} k\right) - \varepsilon} \, .$$

Bemerkung: Gilt $\kappa = k$, so ist G eine Siegelsche E-Funktion. Man findet dann ähnliche Ergebnisse bei Osgood (Trans. Am. Math. Soc. 123 (1966), 64-87).

Michael Welter

On integer-valued functions

The talk is about some of my recent results concerning integer-valued functions. In particular, I have studied analogues and generalisations of a result by Perelli and Zannier studying the growth of entire functions f with the properties $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ and $f(n + p) \equiv f(n) \pmod{p}$ for all positiv integers n and all sufficiently large primes p.

Eduard Wirsing

Differenzen-Boxen

Eine Differenzen-Box ist eine Folge B_0, B_1, ... zyklisch geordneter Quadrupel B_0 von ganzen oder reellen Zahlen, $B_i = (a_{i0}, \ldots, a_{i3})$, mit der Vorschrift, daß das jeweils nächste Quadrupel aus den absoluten Differenzen der benachbarten Elemente gebildet ist, also $B_{i+1} = (|a_{i1} - a_{i0}|, \ldots, |a_{i4} - a_{i3}|)$ mit $a_{i4} = a_{i0}$. Es ist seit langem bekannt, daß jede ganzzahlige Differenzen-Box nach endlich vielen Schritten ‚abbricht', d.h. zum Nullquadrupel führt und zwar überraschend schnell. Anscheinend ist aber bisher unbekannt, wie lang die Folge, gemessen an der Größe der Anfangswerte, tatsächlich werden kann. Diese Wissenslücke soll hier geschlossen werden.

Dieter Wolke

Über den vermuteten Fehlerterm im Primzahl-Zwillingsproblem

Seit Hardy und Littlewood (1922) hat man eine genaue Vorstellung vom vermutlichen Verhalten der Zählfunktion für die Primzahlpaare mit der Differenz k:

$$\psi_2(x,k) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{k<n\le x} \Lambda(n)\Lambda(n-k)$$

$$= (x-k) \prod_{p>2} \Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big) \cdot \begin{cases} \prod\limits_{p\mid k,\, p>2} \frac{p-1}{p-2} & \text{für} \quad 2 \mid k \\ 0 & \text{für} \quad 2 \nmid k \end{cases}$$

(Λ ist die von-Mangoldt-Funktion).

Der „Fehlerterm" ist im Mittel von kleiner Größenordnung

$$\sum_{k\le x} (E(x,k))^2 \ll_A \frac{x^3}{(\ln x)^A} \quad \text{für jedes } A > 0\,.$$

(A. Lavrik, 1960).

Unter Benutzung der Lavrikschen Abschätzung kann für jedes feste k die folgende Darstellung gezeigt werden:

Sei $C > 0$, $x \ge 2$ und $Q = x(\ln x)^{-C}$. Dann gilt

$$E(x,k) = \Bigg(\sum_{\frac{1}{2}Q<p\le Q} p\Bigg)^{-1} \cdot \sum_{\frac{1}{2}Q<p\le Q} \sum_{a=1}^{p-1} e\Big(k\frac{a}{p}\Big) \cdot \Big|S\Big(\frac{a}{p}\Big)\Big|^2 + O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big)$$

mit $S(\alpha) = \sum\limits_{n\le x} \Lambda(n) e(n\alpha)$. Es wird also über Werte aus dem Integral

$$\int_0^1 d\alpha\, e(k\alpha)\, |S(\alpha)|^2$$

an den minor arc-Stellen $\alpha = \frac{a}{p}$ summiert, wobei die sehr unregelmäßig verteilten Längen der minor arcs nicht in Erscheinung treten.

Literaturverzeichnis

[1] Halberstam, H., Roth, K.F.: *Sequences*, Clarendon Press, Oxford 1966

[2] Knopfmacher, J.: *Abstract Analytic Number Theory*, North–Holland Mathematical Library Vol.12, North–Holland & American Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York 1975

[3] A. Laurinčikas, *Limit theorems for the Mellin transform of* $|\zeta(1/2+it)|^4$, Preprintas 2005-25, Vilniaus Universitetas, Matematikos ir Informatikos fakultetas, 2005.

[4] W. Narkiewicz, *On a class of arithmetical convolutions*,*Coll. Math.* **10** (1963), 81–94

Teilnehmer

Michel Balazard	balazard@math.u-bordeaux.fr
Valentin Blomer	vblomer@math.toronto.edu
Kathrin Bringmann	bringman@math.wisc.edu
Jörg Brüdern	bruedern@mathematik.uni-stuttgart.de
Peter Bundschuh	pb@mi.uni-koeln.de
Yvonne Buttkewitz	leros@t-online.de
Rainer Dietmann	dietmarr@mathematik.uni-stuttgart.de
Christian Elsholtz	Christian.elsholtz@rhul.ac.uk
Carsten Elsner	elsnercarsten@web.de
Matthias Frost	matthias.frost@db.com
Daniel Haase	daniel.haase@uni-ulm.de
Karin Halupczok	Karin.Halupczok@math.uni-freiburg.de
Bernhard Heim	heim@mpim-bonn.mpg.de
Jerzy Kaczorowski	kjerzy@amu.edu.pl
Günther Köhler	koehler@mathematik.uni-wuerzburg.de
Hans Günther Kopetzky	kopetzky@unileoben.ac.at
Antanas Laurinčikas	antanas.laurincikas@maf.vu.lt
Lutz Lucht	lucht@math.tu-clausthal.de
Manfred Madritsch	madritsch@finanz.math.tu-graz.at
Helmut Maier	hamaier@mathematik.uni-ulm.de
Eugenijus Manstavičius	eugenijus.manstavicius@maf.vu.lt
Samuel J. Patterson	sjp@uni-math.gwdg.de
János Pintz	pintz@renyi.hu
Štefan Porubský	porubsky@cs.cas.cz
Maciej Radziejewski	maciejr@amu.edu.pl
Tanguy Rivoal	rivoal@ujf-grenoble.fr
Friedrich Rösler	roeslerf@ma.tum.de
András Sárközy	sarkozy@cs.elte.hu
Andrzej Schinzel	schinzel@impan.gov.pl
Jan-Christoph Schlage-Puchta	jcp@arcade.mathematik.uni-freiburg.de
Wolfgang A. Schmid	wolfgang.schmid@uni-graz.at
Friedrich Schmitt	ChrisHeinSchmitt@aol.com
Johannes Schoissengeier	hannes.schoissengeier@univie.ac.at
Wolfgang Schwarz	wolfgang.doris.schwarz@t-online.de
Jörn Steuding	jorn.steuding@uam.es
Jörg Thuswaldner	Joerg.Thuswaldner@mu-leoben.at
Stephan Wagner	wagner@finanz.math.tu-graz.ac.at
Rolf Walliser	rowa@email.mathematik.uni-freiburg.de
Michael Welter	welter@math.uni-bonn.de
Eduard Wirsing	ewirsing@mathematik.uni-ulm.de
Dieter Wolke	Dieter.Wolke@math.uni-freiburg.de