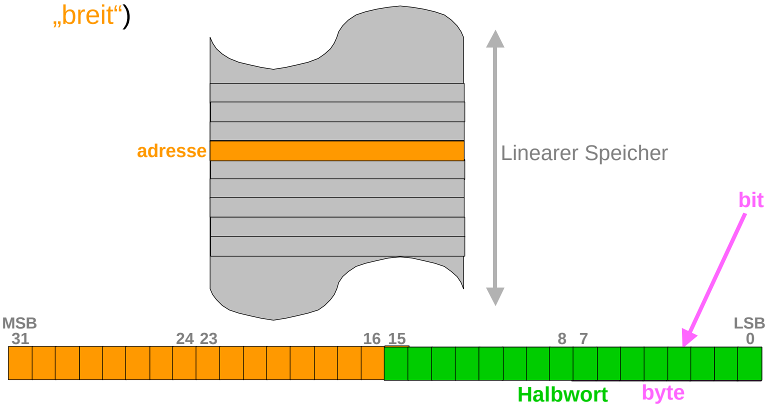
Zahlendarstellung

Zahlen und ihre Darstellung in Digitalrechnern

Grundstrukturen: Speicherorganisation und Zahlenmengen

- Linear organisierter Speicher
  - zu einer Adresse gehört ein Speicher mit 32 Bit-Zellen (1 Wort „breit“)



Grundstrukturen: Speicherorganisation und Zahlenmengen

- Zahlenmengen ($\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
  - natürliche Zahlen
  - ganze Zahlen = natürliche Zahlen und negative ganze Zahlen
  - rationale Zahlen = ganze Zahlen und gebrochene zahlen
  - reelle Zahlen = rationale Zahlen und irrationale Zahlen
  - komplexe Zahlen = reelle Zahlen und „echt imaginäre“ Zahlen

Ganzzahlendarstellung

➢ Basis-Zahlendarstellung: $zahl = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i$

- die Basis b ≥ 2 ist aus den natürlichen Zahlen
- die Ziffer a_i ist aus den natürlichen Zahlen
- $0 \le a_i \le b-1$
- die Darstellung ist eindeutig
- Schreibweise:

  zahl = $(a_n \ldots a_0)_b$

  Beispiel: $(1024)_{10} = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

- gebräuchliche Zahlenbasen:
  - 2 (Binär-System)
  - 8 (Oktal-System)
  - 10 (Dezimal-System)
  - 16 (Hexadezimal-System)

- Multiplikation/Division mit b: shift der Zahl-Ziffernfolge um 1 Stelle nach links/rechts

Ganzzahlendarstellung

➢ Konvertierung zwischen zwei Basen:

$$zahl = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

$$\boxed{zahl = (\cdots(a_n b + a_{n-1}) \cdot b + \ldots) \cdot b + a_0}$$

(→ Horner-Schema)

- Basis b → Basis 10
  - Eingabe: b, Feld a[0..k]
  - Ausgabe: Dezimalzahl
  - „vorwärts: von links nach rechts“

```
zahl := 0;
FOR i:=n TO 0 BY -1 DO;
  zahl := zahl*b + a[i]
END;
```

- Basis 10 → Basis b
  - Eingabe: Dezimalzahl, neue Basis b
  - Ausgabe: Feld a[0..k] (neue Ziffernfolge)
  - „rückwärts: von rechts nach links “

```
i := 0;
a[i] := 0;
WHILE zahl>0 DO
 a[i] := zahl MOD b;
 zahl := zahl DIV b;
 i    := i+1
END;
```

Ganzzahlendarstellung

- Konvertierung zwischen zwei Basen: (cont'd)
  - Beispiel: $(236)_8 \rightarrow (?)_3$
    - Schritt 1: $(236)_8 \rightarrow$ Dezimalzahl
      n = 2:
      $(236)_8 = ((0 \cdot 8 + 2) \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 6 = 158 = (158)_{10}$
    - Schritt 2: Dezimalzahl $\rightarrow (?)_3$
      b = 3
      $(158)_{10}$:

158 / 3	= 52	Rest	2
52 / 3	= 17	Rest	1
17 / 3	= 5	Rest	2
5 / 3	= 1	Rest	2
1 / 3	= 0	Rest	1

also: $(158)_{10} = ((((0 \cdot 3 + 1) \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 1) \cdot 3 + 2 = (12212)_3$

wobei: (...) = 52, (...) = 17, (...) = 5, (...) = 1,

Ganzzahlendarstellung

- Spezialfall: Konvertierung zwischen Basen $2 \rightarrow 2^k$:
  - von rechts nach links: Zusammenfassen von jeweils k benachbar-ten Ziffern
  - Beispiel mit der Zahl $(300)_{10}$: Die Darstellung zur Basis b=2 soll in die zur Basis b=8 umgewandelt werden, d.h. k=3:

$$(100101100)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$100\,101\,100 = (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^6 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^0$$

$$100\,101\,100 = 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = (454)_8$$

- Spezialfall: Konvertierung zwischen Basen $2^k \rightarrow 2$:
  - selbst nachdenken!

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- Allgemeines
  - **Die Anzahl der darstellbaren Zahlen ist beschränkt!**
    (abhängig von der Wortlänge)
    - Wortlänge = 8bit → N = 2^8 = 256 versch. 0/1-Kombinationen
      → 256 verschiedene Zahlen darstellbar, z.B. 0 ... 255 (= N - 1)
  - Unser Rechner kann nur addieren, besitzt lediglich ein Addierwerk, kein Subtrahierwerk; letztlich heisst das, auch Multiplikationen und Divisionen muss das Addierwerk erledigen!
  - Frage: Kann man sich im Bereich der Dezimalzahlen einen Algorithmus vorstellen, der mittels Addition eine Subtraktion durchführt?
    (unter der Nebenbedingung, dass die Anzahl der darstellbaren Zahlen beschränkt ist)
    - Idee: falls $x > 0$, dann nix: $x \to x$
      falls $x < 0$, dann: $x \to N - |x|$

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- 4 Möglichkeiten der Darstellung
  - Vorzeichen und Betrag („signed magnitude“)
    - das fällt einem sofort ein:
      nehme das Bit ganz links als Vorzeichen: 0 ↔ + ; 1 ↔ –
      die restlichen Bits stellen den Betrag der Zahl dar.
    - Beispiel: Wortlänge n = 4 Bit → N = 2^4 = 16 versch. 0/1-Kombinationen
      → 16 verschiedene Zahlen darstellbar, bisher (kardinal) 0 ... 15 (= N - 1),
      jetzt (integer) -7 ... +7, also $-(2^{n-1} - 1)$ ... $+(2^{n-1} - 1)$
    - Problem 1:
      es gibt zwei Nullen: +0 ↔ 0000; -0 ↔ 1000
      also: Eine Zahl aber zwei unterscheidbare(!) Bitfolgen
    - Problem 2:
      Bei dieser Darstellung ist eine Addierwerk und ein Subtrahierwerk notwendig; es gibt keinen Algorithmus der Subtraktion per Addition erledigt für diese Darstellung.
    - Problem 3:
      Es ist eine Logik erforderlich zur Entscheidung ob Addition oder Subtraktion auszuführen (4 Vorzeichenfälle)

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- 4 Möglichkeiten der Darstellung (cont'd)
  - Einer-Komplement (One's Complement)
    - gebildet durch stellenweises Invertieren der Originalzahl: 0 → 1, 1 → 0
    - addiert man zur Originalzahl ihr Einer-Komplement (= Invertierte) so ergibt sich immer eine Folge von Einsen.
    - Eine Folge von Einsen ist nichts anderes als (die Invertierte der) Null, also -0 (+0 ↔ Folge von Nullen), d.h. man hat zur Originalzahl deren „Negatives addiert".
    - Beispiel: Wortlänge n = 4 Bit → N = 2^4 = 16 versch. 0/1-Kombinationen → 16 verschiedene Zahlen darstellbar, bisher (kardinal) 0 ... 15 (= N - 1), jetzt (integer) -7 ... +7, also $-(2^{n-1} - 1)$ ... $+(2^{n-1} - 1)$
    - Problem 1 besteht noch:
      es gibt zwei Nullen: +0 ↔ 0000; -0 ↔ 1111
      also: Eine Zahl aber zwei unterscheidbare(!) Bitfolgen
    - Problem 2 ist gelöst:
      Bei dieser Darstellung genügt ein Addierwerk; Subtraktion bedeutet Addition des Negativen.
    - Problem 3 (Logik) stellt sich nicht mehr.
    - Problem 4: 1011 = -4 oder +11 ?? durch beschränkten Zahlenbereich -7 .. .. +7 gelöst. ⇒ Bit ganz links: 1 ↔ negative Zahl, 0 ↔ positive Zahl

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- 4 Möglichkeiten der Darstellung (cont'd)
  - Zweier-Komplement (Two's Complement)
    - gebildet durch das Einer-Komplement mit nachfolgender Addition von 1
    - addiert man zur Originalzahl ihr Zweier-Komplement (= Invertierte + 1) so ergibt sich immer eine 1 mit nachfolgenden Nullen; die Anzahl der Stellen ist um eine gewachsen.
    - Streicht man die führende 1, so sind die nachfolgenden Nullen nichts anderes als Null, man hat zur Originalzahl deren „Negatives addiert".
    - Beispiel: Wortlänge n = 4 Bit → N = 2^4 = 16 versch. 0/1-Kombinationen → 16 verschiedene Zahlen darstellbar, bisher (kardinal) 0 ... 15 (= N - 1), jetzt (integer) -8 ... +7, also $-(2^{n-1})$ ... $+(2^{n-1} - 1)$
    - Problem 1 besteht nicht mehr: 0000 ↔ 0; 1111 ↔ -1
    - Problem 2 ist gelöst:
      Bei dieser Darstellung genügt ein Addierwerk; Subtraktion bedeutet Addition des Negativen.
    - Problem 3 (Logik) stellt sich nicht mehr.
    - Problem 4: 1011 = -5 oder +11 ?? durch beschränkten Zahlenbereich -8 .. .. +7 gelöst. ⇒ Bit ganz links: 1 ↔ negative Zahl, 0 ↔ positive Zahl

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- 4 Möglichkeiten der Darstellung (cont'd)
  - Zweier-Komplement (cont'd)
    - übrigens: Im Zweier-Komplement stimmt die Dualdarstellung von -5 mit der von 2^4 - 5 = 16 - 5 = 11 überein:

      $(5)_{10} = (0101)_2$

      Zweier-Komplement von $(5)_{10}$: $(1010)_2 + 1 = (1011)_2 = (11)_{10}$
    - Beispiel mit Dezimalzahlen (b = 10):
      - Es sei n = 2 → N = 10^2 = 100 verschiedene Dezimalzahlen, entweder kardinal 0 ... 99 (= N - 1) oder (integer) -50 ... +49, also $-5 \cdot 10^{n-1}$ ... $+ 5 \cdot 10^{n-1} -1$
      - Originalzahl sei (z.B.): 23
        Ihr Zehner-Komplement: 10^2 - 23 = 77 . 77 ist nicht im Zahlenbereich -50 ... +49; 77 ist die Darstellung von -23 im Zehner-Komplement (x<0: x → N - |x|).
      - addiert man zur Originalzahl ihr Zehner-Komplement, so ergibt sich immer eine 1 mit nachfolgenden Nullen (hier 100); die Anzahl der Stellen ist um eine gewachsen.
      - Streicht man die führende 1, so sind die nachfolgenden Nullen nichts anderes als Null, man hat zur Originalzahl deren „Negatives addiert", also eine Darstellung von -23.
      - ⇒ Statt (z.B) 36 - 23 = 13 kann man auch rechnen: 36 + 77 = 113
        ⇒ Statt (z.B) 14 - 23 = - 9 kann man auch rechnen: 14 + 77 = 91 =100 - 9

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- 4 Möglichkeiten der Darstellung (cont'd)
  - Zweier-Komplement (cont'd)
    - häufigst genutzte rechnerinterne Darstellung negativer ganzer Zahlen.
    - Beispiel mit Dualzahlen (b = 2):
      - Dual zu berechnen: 85 - 103 = -18 $(85)_{10} = (01010101)_2$
      - Es sei n = 8 → N = 2^8 = 256 verschiedene Dezimalzahlen: -128 ... +127
      - Aus der Subtraktion -103 soll eine Addition werden:
        Originalzahl ist: $(103)_{10} = (01100111)_2$
        Ihr Zweier-Komplement: 10011000 + 1 = 10011001.
      - Subtraktion → Addition: 01010101 + 10011001 = 11101110
      - Anzahl der Stellen nicht gewachsen
        ⇒ Keine Streichung der führenden 1, die 1 ganz links zeigt ein negatives Ergebnis, d.h. Ergebnis liegt als Zweier-Komplement vor
        ⇒ Übersetzung = Bildung Zweier-Komplement:
        11101110 → 00010001 +1 = 00010010 = $(18)_{10}$
        ⇒ Das negative Ergebnis lautet -18

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- 4 Möglichkeiten der Darstellung (cont'd)
  - Excess 2^{n-1}
    - der gesamte darstellbare Zahlenbereich (positive und negative Halbachse) wird auf die positive Halbachse abgebildet
      excess-zahl = zahl + 2^{n-1}
    - Beispiel mit n = 8, d.h. Excess = „Shift" = $2^{8-1} = 2^7$
      - $(-3)_{10} \rightarrow -3 + 128 = (125)_{10} = (01111101)_2$
    - Die Darstellungen sind mit denjenigen der Zweier-Komplement-Darstellung bis auf das invertierte linke Bit („Vorzeichen") identisch

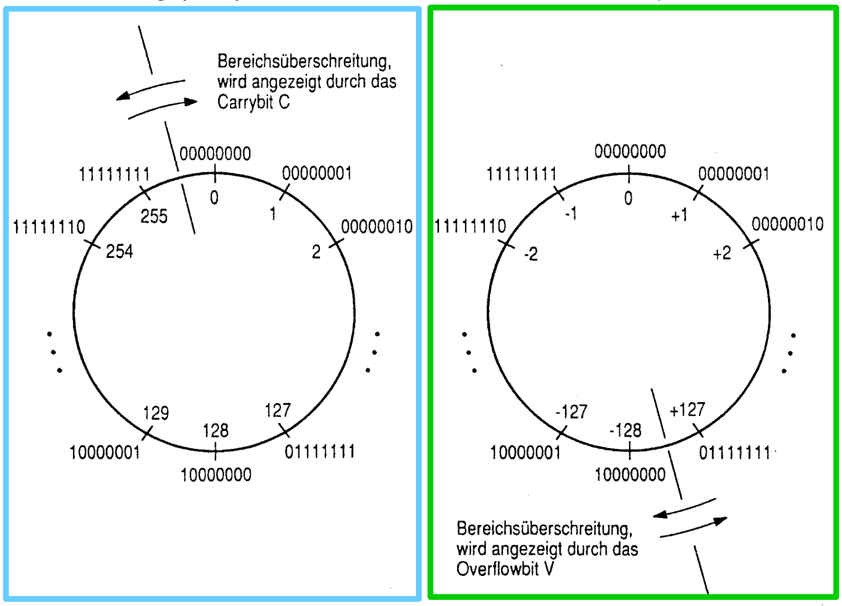
Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

- Vergleich der 4 Systeme (n=4)

Dual	Vorz./Betrag	Einer-Kompl.	Zweier-Kompl.	Exzess
0000	+ 0	+ 0	0	– 8
0001	+ 1	+ 1	+ 1	– 7
0010	+ 2	+ 2	+ 2	– 6
0011	+ 3	+ 3	+ 3	– 5
0100	+ 4	+ 4	+ 4	– 4
0101	+ 5	+ 5	+ 5	– 3
0110	+ 6	+ 6	+ 6	– 2
0111	+ 7	+ 7	+ 7	– 1
1000	– 0	– 7	– 8	0
1001	– 1	– 6	– 7	+ 1
1010	– 2	– 5	– 6	+ 2
1011	– 3	– 4	– 5	+ 3
1100	– 4	– 3	– 4	+ 4
1101	– 5	– 2	– 3	+ 5
1110	– 6	– 1	– 2	+ 6
1111	– 7	– 0	– 1	+ 7

Negative Zahlen im Binärsystem (Dualsystem)

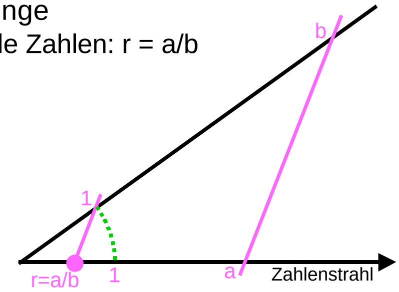
➢ Zahlenring (n=8) für Dualzahlen und Zweier-Komplement



Gleitkommazahlen: Darstellung und Arithmetik

Gleitkommazahlen

➢ Zahlenmenge
- rationale Zahlen: r = a/b



- reelle Zahlen: Hinzunahme von nicht-rationalen Zahlen: π, e, $\sqrt{2}$
  Die reellen Zahlen in ihrer mathematischen Bedeutung stellen ein Kontinuum dar (jedes beliebig große Intervall auf dem Zahlenstrahl enthält unendlich viele Werte)

Gleitkommazahlen

➢ Zahlenmenge (cont'd)

- Wertebereich REAL (Gleitkommazahlen) im Rechner stellt eine endliche Menge von Repräsentanten von Intervallen des Kontinuums dar. ⇒ **Diskretisierung**
  - numerische Darstellung → Verarbeitung von Daten des Typs REAL nicht exakt (→ numerische Mathematik)

Gleitkommazahlen $\not\Leftrightarrow$ mathematisch reelle Zahlen
$\not\Leftrightarrow$ mathematisch rationale Zahlen

Gleitkommazahlen

0.1 = 1/10 = 1/b ist kleinstmöglicher **Mantissen**betrag!
Warum?
Der nächstkleinere **Zahlen**betrag wäre: $0.099 \cdot 10^{-99}$
wegen normierter Darstellung:
$0.099 \cdot 10^{-99} \rightarrow 0.99 \cdot 10^{-100}$
Das ist unmöglich wegen zweiziffrigem Exponent!

➢ Zahlendarstellung (Konrad Zuse, 1937)

$$zahl = m \cdot b^e$$

- m : Mantisse , -M < m < +M
  Normalform: $1/b \leq |m| < 1$ oder $m = 0$
- b : Basis, z.B. 10, aber auch kleine Potenz von 2: 2, 4, 8, 16
- e : Exponent, $-E \leq e \leq +E$, auch $-E_1 \leq e \leq +E_2$
- alle Werte M, b, E sind rechnerabhängig
- Aufbau:
  $zahl = \pm\, 0.a_1a_2...a_\mu \cdot b^e$ mit $a_1 \neq 0$ (normalisierte Darstellung)
  und $0 \leq a_i \leq b-1$
- Beispiel: b = 10, Mantisse m: 3 Ziffern, Exponent e: 2 Ziffern
  - Mantisse: $1/10 \leq |m| < 1$ oder 0
  - Exponent: $-99 \leq e \leq +99$
  - darstellbarer Bereich: $-0.999 \cdot 10^{99}$ ... $-0.100 \cdot 10^{-99}$
    $+0.100 \cdot 10^{-99}$ ... $+0.999 \cdot 10^{99}$
- Multiplikation/Division mit b: shift der Zahl-Ziffernfolge um 1 Stelle nach links/rechts oder $e \rightarrow e+1$ / $e \rightarrow e-1$

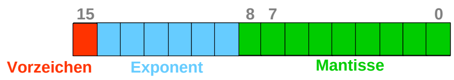
Gleitkommazahlen

Die Mantisse ist somit um 1Bit länger als gedacht, weil a_1 nicht gespeichert werden muss!

- Normalisierung
  - Darstellung der Mantisse in Normalform: $1/b \leq |m| < 1$
  - eine Mantisse mit gesetztem Führungsbit a_1 heisst normalisiert

    zahl = $\pm\, 0.a_1 a_2 \ldots a_\mu \bullet b^e$ mit $a_1 = 1$
  - durch die Normalisierung wird die Gleitpunktdarstellung eindeutig

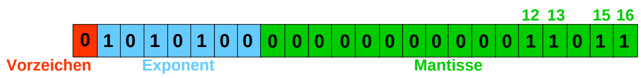
- Rechnerinterne Repräsentation
  - der verfügbare Platz (hier 2 Byte) wird in Felder aufgeteilt



  - Für arithmetische Operationen muss bei hardwaremäßiger Realisierung hoher Aufwand betrieben werden, daher
    - Software-Realisierung
    - Spezialprozessoren
    - Leistung[illegible]

Gleitkommazahlen

- Beispiel einer 3 Byte breiten Zahlendarstellung (Basis b = 2)



- Vorzeichen: 0, also +
- Exponent e: Breite: 7 Bit

  Exzess 64(=2^{7-1}) - Darstellung

  $(1010100)_2 = (84)_{10} \rightarrow 84 - 64 = 20$

  $b^e = 2^{20} = 1048576$
- Mantisse m: Breite: 16 Bit

  Darstellung der Mantisse:

$$m = \sum_{j=1}^{16} a_j \cdot 2^{-j} = 1 \cdot 2^{-12} + 1 \cdot 2^{-13} + 1 \cdot 2^{-15} + 1 \cdot 2^{-16}$$
$$= (1 \cdot 2^{+4} + 1 \cdot 2^{+3} + 1 \cdot 2^{+1} + 1 \cdot 2^{0}) \cdot 2^{-16}$$
$$= 27 \cdot 2^{-16}$$

- Zahl: zahl = $+\, 27 \bullet 2^{-16} \bullet 2^{20} = +\, 432$

Gleitkommazahlen

➢ Beispiel (cont'd)

- Normalisierung:

$$
\begin{aligned}
zahl &= 2^{20} \cdot (1 \cdot 2^{-12} + 1 \cdot 2^{-13} + 0 \cdot 2^{-14} + 1 \cdot 2^{-15} + 1 \cdot 2^{-16}) \\
&= 2^{20} \cdot (2^{-11} \cdot (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}) \\
&= 2^{9} \cdot (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5})
\end{aligned}
$$

  - Vorzeichen: bleibt 0, also **+**
  - Exponent e: Breite: 7 Bit
    Exzess 64(=2^{7-1}) - Darstellung
    9 + 64 = 73 → $(73)_{10} = (1001001)_2$
    Exponent e um 11 dekrementiert
  - Mantisse m: Breite: 16 Bit
    Mantisse um 11 Bit nach links geschoben

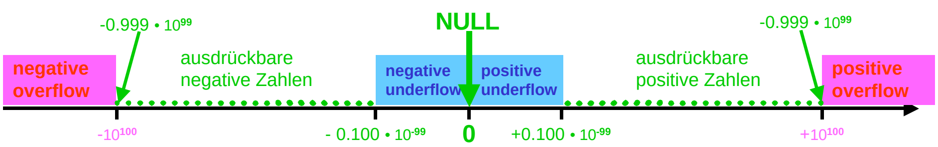
Vorzeichen	Exponent							Mantisse															
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

  - Zahl bleibt erhalten: zahl = **+** 27 • 2^{-5} • 2^{9} = **+** 432

Gleitkommazahlen

➢ REAL-Zahlen auf dem Zahlenstrahl

- Beispiel: b = 10, Mantisse m: 3 Ziffern, Exponent e: 2 Ziffern



- jede REAL-Zahlen repräsentiert ein Intervall der reellen Zahlen; das Intervall wächst mit zunehmendem Betrag der Zahl, d.h. die Dichte der Repräsentation nimmt mit zunehmendem Betrag der Zahl ab.
- Eine Abschätzung des Einflusses der Ungleichverteilung der Repräsentanten auf die rechenoperationen ist nicht trivial.
- Behandlung von overflow/underflow, Null, „undefiniert"?
  → IEEE Floating-Point Standard 754 (1985) (siehe A.S. Tanenbaum)

Gleitkommazahlen

- Probleme
  - Test: Assoziativgesetz (Beispiel mit 4-stelliger Arithmetik)
    x = 9.900, y = 1.000, z = -0.999
    (x+y) + z = 10.90 + (-0.999) = 9.910
    x + (y+z) = 9.900 + 0.001 = 9.901
  - Test: Distributivgesetz (Beispiel mit 4-stelliger Arithmetik)
    x = 1100., y = -5.000, z = 5.001
    (x•y) + (x•z) = (-5500) + 5501 = 1.000
    x • (y+z) = 1100. • 0.001 = 1.100
  - Auslöschung
    Bei der Subtraktion zweier fast gleich großer Werte heben sich die signifikanten Ziffern auf und die Differenz verliert dadurch an Signifikanz (z.B. Differenzenquotient)
  - Überlaufgefahr
    ... bei Division durch kleine Werte

Gleitkommazahlen

- Rechnerarithmetik

$$x = m_x \cdot 2^{e_x}, \quad y = m_y \cdot 2^{e_y}$$

  - Addition
    $$x + y = (m_x \cdot 2^{e_x - e_y} + m_y) \cdot 2^{e_y} \quad falls \quad e_x \le e_y$$
  - Subtraktion
    $$x - y = (m_x \cdot 2^{e_x - e_y} - m_y) \cdot 2^{e_y} \quad falls \quad e_x \le e_y$$
  - Multiplikation
    $$x \cdot y = (m_x \cdot m_y) \cdot 2^{e_x + e_y}$$
  - Division
    $$x \div y = (m_x \div m_y) \cdot 2^{e_x - e_y}$$